

Estudos sobre estabilidade robusta de sistemas lineares por meio de funções dependentes de parâmetros

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

por

Valter Júnior de Souza Leite

Mestre em Engenharia Elétrica – Universidade Federal de Minas Gerais
Engenheiro Eletricista – Universidade Federal de Minas Gerais

23 de Agosto de 2005

Orientador: **Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres** FEEC/UNICAMP

Banca Examinadora

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres

Dra. Sophie Tarbouriech

Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto

Prof. Dr. Wagner Caradori do Amaral

Dra. Isabelle Queinéc

Dr. Pierre-Alexandre Bliman

DT/FEEC/UNICAMP — Brasil (orientador)

LAAS/CNRS — França (co-orientadora)

DAS/UFSC — Brasil

DCA/FEEC/UNICAMP — Brasil

LAAS/CNRS — França

INRIA Rocquencourt — França

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

L536e Leite, Valter Júnior de Souza
 Estudos sobre estabilidade robusta de sistemas lineares
 por meio de funções dependentes de parâmetros / Valter
 Júnior de Souza Leite. --Campinas, SP: [s.n.], 2005.

 Orientador: Pedro Luis Dias Peres
 Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
 Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

 1. Estabilidade. 2. Teoria do Controle. 3. Sistemas
 lineares variantes no tempo. 4. Equações diferenciais
 hiperbólicas. 5. Otimização matemática 6. Liapunov,
 Funções de. I. Peres, Pedro Luis Dias. II. Universidade
 Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e
 de Computação. III. Título.

Título em Inglês: On the robust stability of linear systems by means of parameter
dependent functions

Palavras-chave em Inglês: Stability, Control theory, Linear time invariant systems,
Hyperbolic differential equations, Mathematical
optimization e Lyapunov functions

Área de concentração: Automação

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Pierre-Alexandre Jacques Bliman, Isabelle Queinnec, Eugênio de
Bona Castelan Neto, Sophie Tarbouriech e Wagner Caradori do
Amaral

Data da defesa: 23/08/2005

Resumo

LEITE, Valter Júnior de Souza, *Estudos sobre estabilidade robusta de sistemas lineares por meio de funções dependentes de parâmetros*. Campinas, FEEC, UNICAMP, 2005. Tese (Doutorado). Em Português e Francês.

Este trabalho trata da aplicação de funcionais de Lyapunov e Lyapunov-Krasovskii dependentes de parâmetro a alguns problemas selecionados da área de controle robusto, a saber: \mathcal{D} -estabilidade robusta de polítopo de matrizes, \mathcal{D} -estabilidade robusta de polítopos de polinômios matriciais, estabilidade robusta de sistemas neutrais com atrasos variantes no tempo e controle robusto \mathcal{H}_∞ de sistemas discretos no tempo com atraso nos estados. É utilizada a representação politópica para as incertezas dos sistemas estudados. São obtidas formulações convexas, na forma de desigualdades matriciais lineares, suficientes para a solução dos problemas selecionados. Essas condições podem ser resolvidas numericamente de maneira eficiente por meio de algoritmos especializados baseados em pontos interiores. Os resultados obtidos são menos conservadores que os encontrados na literatura, baseados em geral na estabilidade quadrática, isto é, as matrizes dos funcionais são fixas e independentes da incerteza.

Résumé

LEITE, Valter Júnior de Souza, *Sur la stabilité robuste de systèmes linéaires : une approche par des fonctions dépendantes de paramètres*. Campinas, FEEC, UNICAMP, 2005. Thèse (Doctorat). En Portuguais et en Français.

Ce travail concerne l'application des fonctions de Lyapunov et Lyapunov-Krasovskii dépendantes de paramètre à quelques problèmes sélectionnés dans le contexte de la commande robuste, à savoir : la \mathcal{D} -stabilité robuste de polytopes de matrices, la \mathcal{D} -stabilité robuste de polytopes de polynômes de matrices, la stabilité robuste de systèmes neutres avec des retards variables dans le temps et la commande robuste \mathcal{H}_∞ de systèmes à temps discret et à états retardés. On utilise la représentation polytopique pour les incertitudes des systèmes étudiés. On obtient des formulations convexas, sous la forme d'inégalités matricielles linéaires, suffisantes pour la solution des problèmes sélectionnés. Ces conditions peuvent être résolues numériquement de manière efficace grâce à l'utilisation d'algorithmes spécialisés basés sur la méthode des points intérieurs. Les résultats obtenus sont moins conservateurs que ceux trouvés dans la littérature, basés, en général, sur la stabilité quadratique, c'est-à-dire, les matrices des fonctionnelles sont fixes et indépendantes de l'incertitude.

Abstract

LEITE, Valter Júnior de Souza, *On the robust stability of linear systems by means of parameter dependent functions*. Campinas, FEEC, UNICAMP, 2005. Thesis (Ph. D.). In Portuguese and French.

This work deals with the application of parameter dependent Lyapunov and Lyapunov-Krasovskii functionals to some selected problems of robust control: robust \mathcal{D} -stability of polytopes of matrices, robust \mathcal{D} -stability of polytopes of polynomial matrices, robust stability of uncertain neutral systems with time-varying delays and robust \mathcal{H}_∞ control of uncertain discrete time delay systems. The polytopic representation is used to describe the uncertainties. Convex formulations are obtained, in terms of linear matrix inequalities, that are sufficient for the solution of the selected problems. Those conditions can be solved in a efficient way through specialized interior point algorithms. The obtained results are less conservative than those from the literature, in general based on quadratic stability, i.e., the matrices in the functionals are fixed and do not depend on the uncertainty.

Agradecimentos

Registro meu profundo reconhecimento à qualidade da orientação provida pelo professor Pedro Peres. Não poderia deixar de agradecê-lo pela grande paciência que mostrou ter, especialmente diante das falhas de minha formação. O trabalho ora apresentado é fruto de apontamentos sempre precisos feitos por ele. Seu bom humor e relacionamento cordial permitiram um ambiente de trabalho profícuo e prazeroso.

Agradeço a Sophie Tarbouriech e Isabelle Queinnec pela acolhida no LAAS – CNRS e pela orientação sempre precisa. Obrigado pela paciência, atenção e amizade. E também, obrigado pelo esforço empreendido para consolidar a defesa deste trabalho de doutorado em regime de co-tutela, o que permitiu a obtenção de dois títulos.

Registro meu agradecimento ao professor Eugênio de Bona Castelan (UFSC), pelas ricas discussões técnicas que tivemos durante minha estada no LAAS – CNRS, em Toulouse. Agradeço pela amizade e pelo acolhimento em sua família (Nani e Ana Flávia) durante o tempo que estive em Toulouse. E mais: pelas ótimas *soirées*, regadas aos acordes de sua flauta, do violão de minha Morena e da voz de Vilemar. Claro, acompanhados do bom vinho francês. Obrigado também ao casal Lena e Vilemar pela companhia sempre alegre. Ainda em Toulouse, outros colegas muito me apoiaram, em especial Eduardo Loures, Magnos Martinello e Roberta Gomes, Marcos da Silveira, Adriano, Giórgio Valmórbida. E, claro, às “visitas” que lá recebi: Jean, Éder e Alexsandra.

Obrigado ao professor Seleme Isaac Seleme Jr. (UFMG) por me acolher em sua casa quando passei por Berkeley.

Minha gratidão aos colegas de laboratório, pela amizade sincera, pelas piadas, risos e cordialidade. Pela troca de idéias, pela partilha dos resultados e dos erros. Pela ajuda mútua. Em especial, agradeço aos que estiveram mais próximos: Vinícius Montagner e Ricardo Oliveira. Valeu muito a convivência. Obrigado à Rúbia Mara e aos colegas Edvaldo Juzzo, Paulo (Pangas), Alessandro, Edilson Arruda, Márcia Takahashi, Márcia Lisandra, Alfredo, Cristiane, Tatiane, Fábio, Ricardo Coelho, Alfredo e Vicente Moreira (DCA).

Em minha passagem por Campinas, pude encontrar um grande número de amigos. Esses fizeram a vida muito mais feliz. São companheiros de festas, de estudos, de idéias, de caras e caretas. De cachaça. Esses fizeram o doutorado valer independente dos resultados técnicos alcançados. Grande abraço para vocês: Suely e Pedro, Adriana e Adriano, Lilian e Jean e Éder, Cris, Magal, Victória, Jana e Vitão, João, Flávinha e Leo, Rita Salzano, Josiane, Newtinho, Silvana. E pensar que alguns ajudaram a chorar a passagem do Torresmo...

Agradeço os professores da UFMG que sempre me incetivaram a seguir a vida acadêmica: Fábio Jota, Márcio Fantini e Ronaldo Pena. Meus agradecimentos também à UnED Divinópolis / CEFET– MG pela concessão do afastamento para capacitação, à CAPES pelo apoio financeiro durante minha estada em Toulouse (bolsa PDEE) e em Campinas (parte do período) este último por meio de uma bolsa PICD da cota do CEFET – MG. Agradeço à Escola pública, gratuita e de qualidade, que permitiu minha formação.

Agradeço ao “Mormão”, Daniel Henrique, e a meus pais, Walter Leite e Maria Florentina de Souza Leite, pelo exemplo, pelo apoio constante e pela felicidade de tê-los. Agradeço muito à mulher maravilhosa que topou pegar a estrada e até cruzar o mar para me acompanhar. Minha morena Cláudia, Coração, você é tudo de bom! E não me esqueço do nosso 31 de Julho de 1999, de mãos dadas: *tudo viver a teu lado com o arco da promessa no azul pintado pra durar...*¹ Por fim agradeço ao meu Grandão, Gustavo. Para falar a verdade, meu filho, você não me ajudou muito a terminar esse doutorado... mas me fez muito mais feliz!

¹Amor de Índio. De Beto Guedes e Ronaldo Bastos. Música executada em meu casamento.

PARA CLÁUDIA E GUSTAVO,
AMORES DE MINHA VIDA.

Sumário

Resumo / Résumé / Abstract	iii
Agradecimentos	v
Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
Notação	xv
Acrônimos	xvii
1 Introdução	1
1.1 Estudo da estabilidade robusta de sistemas incertos	2
1.2 Ferramentas matemáticas utilizadas	2
1.2.1 Segundo método de Lyapunov	2
1.2.2 Estabilidade quadrática	3
1.2.3 Funcionais dependentes de parâmetro	3
1.2.4 Aproximação de LMIs por polinômios	4
1.2.5 Lema de Finsler	4
1.3 Problemas estudados e estrutura da tese	5
1.4 Comentários gerais	8
I \mathcal{D}-estabilidade robusta	9
2 \mathcal{D}-estabilidade robusta de sistemas lineares	13
2.1 Introdução	13
2.2 Preliminares	15
2.3 Condições para \mathcal{D} -estabilidade do politopo \mathcal{A}	17
2.4 Análise das condições LMI	23
2.4.1 Complexidade numérica	23
2.4.2 Abrangência das condições LMI	26
2.5 Exemplos	32
2.6 Conclusões	39
3 \mathcal{D}-estabilidade robusta de matrizes polinomiais	41
3.1 Introdução	41
3.2 Preliminares	42
3.3 Condições para a \mathcal{D} -estabilidade do politopo \mathbb{A}	45
3.3.1 Polinômios matriciais de primeira ordem	48

3.3.2	Complexidade numérica	48
3.4	Exemplos	51
3.5	Conclusões	55
II	Sistemas com atraso nos estados	57
4	Estabilidade robusta de sistemas neutrais com atrasos variantes no tempo	61
4.1	Introdução	61
4.2	Preliminares	63
4.3	Estabilidade robusta independente do atraso	64
4.4	Casos particulares	67
4.4.1	Estabilidade robusta do sistema incerto neutral	69
4.4.2	Estabilidade robusta do sistema incerto com atraso nos estados	69
4.4.3	Estabilidade robusta do sistema incerto	70
4.5	Complexidade numérica	70
4.6	Exemplos	71
4.7	Conclusões	73
5	Controle robusto \mathcal{H}_∞ de sistemas discretos no tempo com atraso nos estados	75
5.1	Introdução	75
5.2	Preliminares e formulação do problema	77
5.3	Estabilidade robusta	79
5.4	Controle robusto	82
5.5	Controle robusto \mathcal{H}_∞	83
5.6	Complexidade numérica e extensões	88
5.6.1	Controle descentralizado	89
5.6.2	Falhas de atuadores	89
5.7	Exemplos	90
5.8	Conclusões	96
6	Considerações finais	97
6.1	Outros trabalhos realizados	98
6.2	Perspectivas	101
	Referências Bibliográficas	103

Lista de Figuras

2.1	Complexidade numérica relativa (a) ER_1/EE em função do número de estados n e (b) ER_2/EE em função do número de vértices N (caso discreto).	25
2.2	Complexidade numérica relativa (a) ER_2/EE em função do número de estados n e (b) ER_2/EE em função do número de vértices N (caso contínuo).	25
2.3	Número de politopos estáveis identificados pelos critérios EQ_1 , EE , ER_1 e EC_1 , para $2 \leq n \leq 5$ (abscissas) e $2 \leq N \leq 5$ (barras verticais, $N = 2$ à esquerda). Condições especializadas para sistemas discretos no tempo.	28
2.4	Percentual relativo de acertos ER_1/EE em função do aumento do número de estados n para grupos de exemplos com número de vértices N variando de 2 a 5, da esquerda para a direita. Caso discreto no tempo.	28
2.5	Percentual relativo de acertos $EC_1/(\text{melhor entre } EE \text{ e } ER_1)$ em função do aumento do número de estados n para grupos de exemplos com número de vértices N variando de 2 a 5, da esquerda para a direita, caso discreto no tempo. Não houve ganho para $N = 2$, $n = 2, 3, 4, 5$	29
2.6	Percentual relativo de acertos ER_2/EE em função do aumento do número de estados n para grupos de exemplos com número de vértices N variando de 2 a 5, da esquerda para a direita. Caso contínuo no tempo.	30
2.7	Número de politopos estáveis identificados pelos critérios EQ , EE , ER e EC , para $2 \leq n \leq 5$ (abscissas) e $2 \leq N \leq 5$ (barras verticais, $N = 2$ à esquerda). Condições especializadas para sistemas contínuos no tempo.	31
2.8	Percentual relativo de acertos $EC/(\text{melhor entre } EE \text{ e } ER)$ em função do aumento do número de estados n para grupos de exemplos com número de vértices N variando de 3 a 5, da esquerda para a direita, caso contínuo. Não houve ganho para $N = 2$, $n = 2, 3, 4, 5$ nem tampouco para $N = 3$, $n = 2$	31
2.9	Nuvem de autovalores do sistema incerto discreto no tempo dado pelos vértices (2.39)-(2.42), identificado como estável apenas pela condição EC_1	33
2.10	Nuvem de autovalores do sistema discreto dado por (2.43)-(2.45), identificado como estável apenas pela condição EC_1	34
2.11	Nuvem de autovalores do sistema incerto discreto no tempo dado pelos vértices (2.46)-(2.48), identificado como estável apenas pelas condições EC_1 e EC_2	35
2.12	Nuvem de autovalores associada ao sistema discreto dado por (2.49)-(2.51), identificado como estável apenas pelas condições ER_1 e EC_1 (e EC_2).	36
2.13	Nuvem de autovalores associada ao sistema discreto dado por (2.52)-(2.54), identificado como estável apenas pelas condições EC_1 e EC_2	37
2.14	Nuvem de autovalores do sistema incerto contínuo no tempo descrito pelos vértices dados por (2.55)-(2.57), identificado como estável apenas pelas condições EC_1 e EC_2	38
2.15	Nuvem de autovalores do sistema contínuo dado por (2.58)-(2.60), identificado como estável apenas pelas condições ER_2 , EC_1 e EC_2	39

2.16	Nuvem de autovalores do sistema contínuo dado por (2.61)-(2.63), identificado como estável apenas pelas condições EC_1 e EC_2	39
3.1	Região do plano complexo descrita por $\tilde{\mathcal{R}}_D$	47
3.2	Número de politopos de matrizes polinomiais estáveis identificado pela condição de \mathcal{D} -estabilidade quadrática (DQ) (barras escuras) e pelo Teorema 3.1 (barras claras), para $n = 2, 3$ e 4 , $g = 2, 3$ e 4 e (da esquerda para direita) $N = 2, 3, 4$ e 5 . Caso contínuo no tempo.	51
3.3	Número de politopos de matrizes polinomiais estáveis identificado pela condição de \mathcal{D} -estabilidade quadrática (DQ) (barras escuras) e pelo Teorema 3.1 (barras claras), para $n = 2, 3$ e 4 , $g = 2, 3$ e 4 e (da esquerda para direita) $N = 2, 3, 4$ e 5 . Caso discreto no tempo.	52
3.4	Nuvem de zeros para o politopo de matrizes polinomiais descritas pelos vértices (3.27)-(3.29) (caso contínuo no tempo), identificado como estável apenas pelo Teorema 3.1. . . .	53
3.5	Nuvem de zeros para o politopo de matrizes polinomiais descritas pelos vértices (3.30)-(3.32) (caso contínuo no tempo) identificado como estável apenas pelo Teorema 3.1. . . .	53
3.6	Nuvem de zeros do politopo de matrizes polinomiais descritas pelos vértices (3.33)-(3.35), (caso discreto no tempo), identificado como estável apenas pelo Teorema 3.1.	54
3.7	Nuvem de zeros para o politopo de matrizes polinomiais descritas pelos vértices (3.36)-(3.38) (caso discreto no tempo) identificado como estável apenas pelo Teorema 3.1. . . .	55
4.1	Região $(\bar{h}, \bar{\tau})$ na qual é verificada a estabilidade robusta do sistema linear incerto neutral dado por (4.34)-(4.36), obtida por meio das condições do Teorema 4.2.	72
5.1	Diagrama esquemático do aquecedor elétrico industrial.	91
5.2	Custo garantido \mathcal{H}_∞ alcançado pelas condições do Teorema 5.6 (■) e pelas condições do Corolário 5.5 (▲) no caso de falhas individuais de atuadores, usando K e K_h (linhas contínuas) ou apenas o ganho K (linhas pontilhadas).	95

Lista de Tabelas

2.1	Número de variáveis escalares (\mathcal{K}) e número de linhas LMI (\mathcal{L}) em função do número de estados (n), vértices (N) e ordem da região (d), quando pertinente, para as condições propostas nos Teoremas 2.1 (EC ₁) e 2.2 (EC ₂), no Corolário 2.1 <i>i</i>) (EQ ₁) e <i>ii</i>) (EQ ₂), em [PABB00] (EE), em [RP01a] (ER ₁) para o caso discreto no tempo e em [RP02] (ER ₂) para o caso contínuo no tempo.	24
2.2	Número de politopos estáveis identificados pelos testes EQ (estabilidade quadrática), EE ([PABB00]), ER ₁ ([RP01a]) e EC ₁ (Teorema 2.1), quando aplicados a 1000 politopos estáveis para cada par $2 \leq n \leq 5$, $2 \leq N \leq 5$. Condições especializadas para sistemas discretos no tempo.	27
2.3	Número de politopos estáveis identificados pelos testes EQ (estabilidade quadrática), EE ([PABB00]), ER ₂ ([RP02]) e EC ₁ (Teorema 2.1) quando aplicados a 1000 politopos estáveis para $2 \leq n \leq 5$, $2 \leq N \leq 5$. Condições especializadas para sistemas contínuos no tempo.	29
3.1	Número de variáveis escalares (\mathcal{K}) e número de linhas LMI (\mathcal{L}) em função do número de estados (n), vértices (N) e grau do polinômio matricial (g), quando pertinente, para as condições propostas nos Teoremas 3.1 (TE ₁) e 3.2 (TE ₂), no Lema 3.3 (DQ), no Teorema 1 de [HAPŠ01] (T1 _{HAPS}) e nos Teoremas 1 (T1 _{dOOP}) (semi-plano esquerdo do plano complexo) e 2 (T2 _{dOOP}) (círculo unitário centrado na origem do plano complexo) propostos em [dOP02].	49
3.2	Politopos estáveis identificados para $n \in [2, 4]$, $g \in [2, 4]$ e $N \in [2, 5]$ com as condições (3.15) (DQ) e Teorema 3.1 (TE ₁). Uma centena de politopos de polinômios matriciais robustamente \mathcal{D} -estáveis foram gerados em cada caso.	50
4.1	Número de variáveis escalares (\mathcal{K}) e número de linhas (\mathcal{L}) em função do número de estados (n) e vértices (N) para as condições de análise de estabilidade estudadas.	71
5.1	Número de variáveis escalares, \mathcal{K} , e número de linhas LMI, \mathcal{L}	89
5.2	Custos garantidos \mathcal{H}_∞ para o sistema (5.67) obtidos por meio do Teorema 5.6 (T6), do Corolário 5.5 (C5) e do Corolário 5.6 (C6) para diferentes estruturas bloco-diagonais. O símbolo ‘—’ significa que não foi obtida solução factível.	94
5.3	Custos garantidos \mathcal{H}_∞ para o sistema (5.67), em malha fechada, com ganhos robustos K ou K e K_h , calculados por meio do Teorema 5.6 (T6) e do Corolário 5.5 (C5). Os custos garantidos \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada foram obtidos por meio da solução do problema de otimização $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_\infty}$ aplicado ao Teorema 5.5 e ao Corolário 5.4.	94

Notação

\otimes	Produto de Kronecker
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{R}_+	Conjunto dos números reais não negativos
\mathbb{R}^n	Espaço dos vetores com n entradas reais
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Espaço das matrizes reais com dimensões $m \times n$
\mathbb{C}	Conjunto dos números complexos
A'	Transposto de A
A^*	Transposto conjugado de A
\mathbf{I}_d	Matriz identidade de dimensões $d \times d$
$\mathbf{0}$	Matriz nula de dimensões adequadas
$M > P$ ($M < P$)	Significa que a matriz simétrica $M - P$ é definida positiva (negativa)
$M \geq P$ ($M \leq P$)	Significa que a matriz simétrica $M - P$ é semidefinida positiva (negativa)
\star	Denota os elementos ou blocos simétricos em relação à diagonal principal de uma matriz simétrica
ℓ_2	Denota o espaço de todos as seqüências de vetores com entradas reais sobre os inteiros com energia finita
$\ x(k)\ _2$	Energia de $x(k)$
$\mathcal{C}_\tau = \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$	Denota o espaço de Banach das funções vetoriais mapeando o intervalo $[-\tau, 0]$ em \mathbb{R}^n com a topologia de convergência uniforme
\mathcal{C}_τ^v	Conjunto definido por $\mathcal{C}_\tau^v = \{\phi \in \mathcal{C}_\tau ; \ \phi\ _c < v, v > 0\}$
$\ \phi\ _c$	representa $\sup_{-\tau \leq t \leq 0} \ \phi\ $, sendo $\ \phi\ $ a norma 2 de ϕ
$\rho(A)$	Denota o raio espectral da matriz A

Acrônimos

LMI	Desigualdade matricial linear (do inglês <i>Linear Matrix Inequality</i>)
LMIs	Desigualdades matriciais lineares
EQ	Estabilidade Quadrática

Capítulo 1

Introdução

A estabilidade, ou seja, a propriedade que assegura a um sistema perturbado o retorno a seu estado de equilíbrio em tempo finito após cessada a perturbação, é fundamental para a operação segura e eficiente de sistemas dinâmicos dentre os quais são destacados os sistemas industriais. A investigação da estabilidade em sistemas reais encontra, nos estudos de realimentação de sinais feito por H. W. Bode, um marco fundamental: em [Bod45], são investigadas as propriedades da realimentação de sinais em circuitos amplificadores, por meio de modelos matemáticos, analisando-se os efeitos da realimentação na estabilidade da malha fechada e propondo-se métodos para o projeto de compensadores. Bode utiliza da análise no domínio da frequência e dos resultados de Nyquist [Nyq32] para estudar o comportamento de circuitos elétricos, considerando que os parâmetros desses circuitos possam sofrer variações com o tempo, temperatura etc. Fica marcada, desde então, a preocupação dos estudiosos da área de controle com as incertezas inerentes aos modelos matemáticos — quase sempre obtidos a partir de leis físicas ou por técnicas de identificação — utilizados para representar os processos reais. Geralmente, pode-se falar de uma representação matemática dos sistemas dinâmicos na forma

$$\dot{x} = f(x(t), \alpha(t), u(t)), \quad (1.1)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $\alpha(t)$ representa as incertezas associadas ao modelo ou sistema, $u(t)$ é o sinal de controle e $f(\cdot)$ é a função — equação diferencial — que determina as trajetórias do sistema ao longo do tempo, t . Na maioria das vezes, $f(x(t), \alpha(t), u(t))$ é uma função não-linear. No entanto, as malhas de controle, sobretudo no meio industrial, são estabelecidas e sintonizadas com base em um modelo linear, na maioria das vezes de primeira ou segunda ordem, podendo incluir ou não atraso puro de tempo, que fornece, na maioria das vezes, boa aproximação do comportamento do sistema real apenas em torno de um ponto de operação. Esses modelos, embora simples, são capazes de capturar a dinâmica principal da variável a ser controlada e servem de ponto de partida para o ajuste (ou sintonia) de controladores. No entanto, a consequência dessa simplificação surge na forma de incertezas, pois na maioria das vezes os parâmetros do modelo não são precisamente conhecidos e podem, por exemplo, absorver parte do efeito de dinâmicas de ordens mais elevadas que são negligenciadas. Há que se registrar ainda o ponto de vista econômico, que impõe limites cada vez mais estritos para o comportamento dinâmico dos sistemas. Nesse contexto, o funcionamento seguro de um sistema real passa pela garantia de estabilidade desse sistema.

Por isso, assegurar a estabilidade de um sistema em malha fechada, mesmo na presença de um conjunto possível de incertezas, tornou-se um importante campo de estudo da teoria de controle. Além disso, garantir certas características de desempenho para o sistema sujeito a incertezas e em malha fechada tem

implicações imediatas nos aspectos de segurança, qualidade do produto e economia do processo. Nesse sentido, uma especificação bastante comum é a da localização dos pólos de malha fechada do sistema incerto em determinadas regiões do plano complexo. Assim, métodos de análise que assegurem, além da estabilidade, uma localização regional para os pólos de malha fechada de sistemas incertos ocupam um lugar de destaque dentro da teoria de controle. Esse tipo de estudo, denominado \mathcal{D} -estabilidade, tem encontrado grande desenvolvimento nos últimos anos (veja-se, por exemplo, [Bac98], [CG96] e [PABB00]).

1.1 Estudo da estabilidade robusta de sistemas incertos

Com o intuito de prover testes para o estudo da estabilidade de sistemas com incertezas, isto é, para a análise de estabilidade robusta, diversas abordagens podem ser encontradas na literatura. Dentre outras, vale destacar a análise- μ [ZDG96], metodologias baseadas em polinômios de Kharitonov [BCK95], métodos no domínio da frequência [NT73] e os métodos baseados em funções de Lyapunov. Esses últimos constituem uma das abordagens mais difundidas nos últimos anos para a análise de estabilidade robusta e, também, para a síntese de controladores robustos. A representação de sistemas incertos, no espaço de estados, dada por

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t), \quad (1.2)$$

em que $A(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz incerta pertencente a um politopo convexo com vértices conhecidos, tem sido largamente abordada por meio de métodos baseados em funções de Lyapunov. Neste caso, a estabilidade do sistema é sempre estudada em relação à origem do espaço de estados.

1.2 Ferramentas matemáticas utilizadas

1.2.1 Segundo método de Lyapunov

O amplo uso do “segundo método” ou “método direto” de Lyapunov para tratar a estabilidade do sistema descrito por (1.2) deve-se à generalidade das condições estabelecidas por Lyapunov para verificar a estabilidade assintótica global de um sistema sujeito a incertezas descritas por um parâmetro $\alpha(t)$. Esse resultado é apresentado no teorema seguinte.

Teorema 1.1 (Lyapunov, [BS70]) *O sistema incerto sujeito a incertezas (1.2) é globalmente assintoticamente estável em torno da origem (ponto de equilíbrio do sistema) se existir uma função a valores reais $V(x(t), \alpha(t))$ tal que:*

1. $V(\mathbf{0}, \alpha(t)) = 0, \quad \forall t \geq 0;$
2. $V(x(t), \alpha(t)) \rightarrow \infty$ quando $\|x(t)\| \rightarrow \infty;$
3. $V(x(t), \alpha(t)) > 0, \quad \forall x(t) \neq \mathbf{0}, \quad \forall t \geq 0;$
4. $\dot{V}(x(t), \alpha(t)) < 0, \quad \forall x(t) \neq \mathbf{0}, \quad \forall t \geq 0;$

em que $\dot{V}(\cdot)$ é a derivada temporal de $V(\cdot)$ ao longo das trajetórias do sistema, equação (1.2).

Uma função $V(x(t), \alpha(t))$ que satisfaça as condições do Teorema 1.1 é chamada “função de Lyapunov”. Uma observação importante é que, no caso dos sistemas lineares invariantes no tempo, a existência de uma função de Lyapunov quadrática em x e dependente do parâmetro incerto α é uma condição necessária e suficiente para assegurar a estabilidade robusta assintótica.

1.2.2 Estabilidade quadrática

O problema da análise de estabilidade utilizando o segundo método de Lyapunov está, exatamente, na determinação de uma função de Lyapunov. Assim, grande parte das pesquisas realizadas nas últimas décadas procura verificar a existência de uma função de Lyapunov do tipo

$$V(x(t), \alpha(t)) = x(t)'P(\alpha(t))x(t), \quad (1.3)$$

em que $P(\alpha(t))$ é uma matriz definida positiva para todos os valores possíveis de $\alpha(t)$. Uma escolha possível — e bastante comum — para $P(\alpha(t))$ é

$$P(\alpha(t)) = P(\alpha(t))' \in \mathbb{R}^{n \times n} : P(\alpha(t)) = P > \mathbf{0}, \quad (1.4)$$

em que P possui valor fixo (independe dos valores assumidos por $\alpha(t)$). Quando um sistema admite uma função de Lyapunov dada por (1.3)-(1.4), então diz-se que esse sistema é quadraticamente estável. Esse conceito de estabilidade quadrática (EQ) [Bar85], isto é, a existência de uma mesma função de Lyapunov, independente dos parâmetros incertos, assegurando a estabilidade do sistema para todo o domínio de incertezas, constitui provavelmente o resultado mais importante da década de 1980 no contexto de controle robusto.

A partir da estabilidade quadrática, vários resultados para análise, controle e filtragem robusta, com critérios de desempenho tais como as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , foram desenvolvidos (veja-se, por exemplo, [BEFB94] e referências internas). Essas condições, quase sempre formuladas em termos de desigualdades matriciais lineares (em inglês, LMIs — *Linear Matrix Inequalities*), tornaram-se de fácil solução numérica com o aparecimento de pacotes computacionais especializados [GNLC95], [Stu99]. Alguns trabalhos têm abordado o problema por meio de funções de Lyapunov quadráticas por partes (por exemplo [XSF97], [RJ00], [LP04]), mas a solução numérica geralmente requer elevado esforço computacional.

1.2.3 Funcionais dependentes de parâmetro

Embora a abordagem baseada na estabilidade quadrática seja especialmente adequada à análise de sistemas incertos com parâmetros variantes no tempo, sem restrição do valor da taxa de variação, os resultados obtidos por essa via podem ser bastante conservadores, especialmente quando sabe-se tratar de um sistema invariante no tempo. Recentemente, várias extensões têm aparecido na literatura para a análise e síntese de controladores para sistemas lineares incertos. Com o intuito de obter condições de análise cada vez menos conservadoras, funções de Lyapunov dependentes de parâmetros têm sido freqüentemente utilizadas [FAG96], [GAC96], [MK00], [Tro99]. No entanto, na maioria das condições propostas, alguma restrição estrutural precisa ser verificada. Há ainda casos nos quais o procedimento numérico para o teste de estabilidade depende de parâmetros de escalonamento ou de discretização do espaço paramétrico em uma malha suficientemente fina.

Assim, o objetivo deste trabalho é investigar condições convexas e de dimensões finitas capazes de fornecer funções de Lyapunov dependentes de parâmetros para sistemas lineares incertos e invariantes no tempo. Para isso, as incertezas que afetam o sistema são supostas na forma politópica, com N vértices conhecidos, porém com parâmetro incerto invariante no tempo, isto é, $\alpha(t) = \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, N$.

Mostra-se que as condições aqui obtidas, para diferentes problemas estudados, fornecem resultados significativamente menos conservadores que aqueles utilizando a EQ como base.

1.2.4 Aproximação de LMIs por polinômios

Para o desenvolvimento deste trabalho, duas técnicas são bastante empregadas. A primeira delas, utilizada principalmente nos capítulos 2 e 3, é baseada nos resultados apresentados em [RP01a] e [RP02] cuja idéia principal está na solução de uma LMI parametrizada em α

$$M(r, \alpha) < \mathbf{0}, \quad (1.5)$$

com r sendo a variável de otimização, por meio de um segundo problema de otimização, suficiente para a solução do problema original, dado por

$$M(r, \alpha) < \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 M(r)_j - \frac{2}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \alpha_j \alpha_k M(r)_{jk} \leq \mathbf{0} \quad (1.6)$$

ou

$$M(r, \alpha) < \sum_{j=1}^N \alpha_j^3 M(r)_j + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1; k \neq j}^N \alpha_j^2 \alpha_k M(r)_{jk} + \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=j+1}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \alpha_j \alpha_k \alpha_\ell M(r)_{jkl} \leq \mathbf{0}, \quad (1.7)$$

em que $M(r)$ é uma função independente do vetor de incertezas α . No caso geral, $M(r, \alpha)$ pode ser expressa como uma função matricial polinomial em α de grau qualquer. No entanto, a investigação realizada neste trabalho se atém ao caso em que $M(r, \alpha)$ pode ser escrita como um polinômio em α de grau dois ou três. Assim, usando relaxações LMI sobre a restrição $M(r, \alpha) < \mathbf{0}$, são obtidas condições convexas e de dimensões finitas suficientes para garantir (1.5). Dentre os trabalhos relacionados com esta abordagem, merecem destaque aqueles que utilizam a soma de quadrados (em inglês, SOS – *Sum Of Squares*) e os que abordam o problema por meio do estudo da positividade de polinômios. Para detalhes, veja-se [Par00], [Las01] e [HL03].

1.2.5 Lema de Finsler

Outra técnica bastante utilizada neste trabalho é o Lema de Finsler, empregada para separar produtos entre as matrizes do sistema e as do funcional de Lyapunov. Além disso, o uso desse lema permite a introdução de novas variáveis matriciais de otimização que são exploradas para a redução do conservadorismo das condições estudadas. Aqui, esse lema é apresentado para o caso dependente de parâmetro.

Lema 1.1 *Sejam $x \in \mathbb{R}^n$, $Q(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, simétrica, e $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\alpha : \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, N$, tal que o posto($B(\alpha)$) $< n$. As seguintes assertivas são equivalentes:*

$$i) \ x' Q(\alpha) x < \mathbf{0}, \quad \forall x : B(\alpha) x = \mathbf{0}, \quad x \neq \mathbf{0}$$

ii) $\mathcal{B}^\perp(\alpha)' \mathcal{Q}(\alpha) \mathcal{B}^\perp(\alpha) < \mathbf{0}$, em que $\mathcal{B}^\perp(\alpha)$ denota uma base para o espaço nulo de $\mathcal{B}(\alpha)$

iii) $\exists \mu(\alpha) \in \mathbb{R}_+ : \mathcal{Q}(\alpha) - \mu(\alpha) \mathcal{B}(\alpha)' \mathcal{B}(\alpha) < \mathbf{0}$

iv) $\exists \mathcal{X}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{Q}(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha) \mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)' \mathcal{X}(\alpha)' < \mathbf{0}$

Prova: A prova desse lema é baseada na demonstração apresentada em [dOS01], para o caso exato. Verifica-se $i) \Leftrightarrow ii)$, pois todo x tal que $\mathcal{B}(\alpha)x = \mathbf{0}$ pode ser escrito como $x = \mathcal{B}^\perp(\alpha)y$ e, conseqüentemente, $i) \Rightarrow y' \mathcal{B}^\perp(\alpha)' \mathcal{Q}(\alpha) \mathcal{B}^\perp(\alpha)y < \mathbf{0}$, para todo $y \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathcal{B}^\perp(\alpha)' \mathcal{Q}(\alpha) \mathcal{B}^\perp(\alpha) < \mathbf{0}$. Por outro lado, assumindo que $ii)$ é verificada, multiplique-se o lado esquerdo dessa condição à direita por $y \neq \mathbf{0}$ e à esquerda por y' para obter $i)$.

Multiplique-se o lado esquerdo de $iii)$ ou $iv)$ à direita por $\mathcal{B}^\perp(\alpha)$ e à esquerda por $\mathcal{B}^\perp(\alpha)'$ para obter $ii)$. Assumindo que $ii)$ é verificada, a condição $iii)$ pode ser recuperada como segue: fatore-se $\mathcal{B}(\alpha)$ em um produto de matrizes de posto completo, $\mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{B}_\ell(\alpha) \mathcal{B}_r(\alpha)$, defina-se $\mathcal{W}(\alpha) = \mathcal{B}_r(\alpha)' (\mathcal{B}_r(\alpha) \mathcal{B}_r(\alpha)')^{-1} (\mathcal{B}_\ell(\alpha)' \mathcal{B}_\ell(\alpha))^{0.5}$ e aplique-se a transformação de congruência

$$\begin{bmatrix} \mathcal{W}(\alpha)' \\ \mathcal{B}^\perp(\alpha)' \end{bmatrix} (\mathcal{Q}(\alpha) - \mu(\alpha) \mathcal{B}(\alpha)' \mathcal{B}(\alpha)) \begin{bmatrix} \mathcal{W}(\alpha) & \mathcal{B}^\perp(\alpha) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \mathcal{W}(\alpha)' \mathcal{Q}(\alpha) \mathcal{W}(\alpha) - \mu(\alpha) \mathbf{I} & \mathcal{W}(\alpha)' \mathcal{Q}(\alpha) \mathcal{B}^\perp(\alpha) \\ \star & \mathcal{B}^\perp(\alpha)' \mathcal{Q}(\alpha) \mathcal{B}^\perp(\alpha) \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (1.8)$$

em que \star denota o bloco simétrico em relação à diagonal principal. Como o bloco $(2, 2)$ de (1.8) é definido negativo (por hipótese), conclui-se que existe $\mu(\alpha) \in \mathbb{R}_+$ suficientemente grande tal que a condição acima seja verificada. Resta mostrar que $iii) \Rightarrow iv)$. Para isso, basta escolher $\mathcal{X}(\alpha) = -\mu(\alpha) \mathcal{B}(\alpha)'/2$. ■

Portanto, essas duas técnicas (aproximação por polinômios e Lema de Finsler) são utilizadas para investigar o uso de funcionais de Lyapunov dependente de parâmetros em sistemas incertos. A aplicação dessas idéias é apresentada em duas partes. Na primeira, é investigada a \mathcal{D} -estabilidade robusta de sistemas lineares. É, portanto, estudada a \mathcal{D} -estabilidade robusta tanto de matrizes incertas (verificação da pertinência dos autovalores de um politopo de matrizes a uma região \mathcal{D} do plano complexo) quanto de polinômios matriciais incertos (verificação da pertinência dos zeros de um politopo de polinômios matriciais a uma região \mathcal{D} do plano complexo). Na segunda parte deste trabalho é investigada a aplicação de funcionais de Lyapunov-Krasovskii dependentes de parâmetro em sistemas lineares incertos com atrasos nos estados. Embora não apresentado neste trabalho, os resultados obtidos nessa parte podem ser estendidos seguindo as idéias de [LP03a], [RP01a], [RP02] para a análise robusta, idéias que são exploradas na Parte I. Em particular, para os sistemas discretos no tempo, condições para o cômputo do custo garantido \mathcal{H}_∞ , bem como para a síntese de ganhos robustos para realimentação de estados que asseguram um custo garantido \mathcal{H}_∞ para o sistema em malha fechada, são apresentadas na Parte II.

Assim, são investigados quatro problemas relevantes em teoria de controle, visando a aplicação de funções de Lyapunov (ou Lyapunov-Krasovskii) dependentes de parâmetros para a redução do conservadorismo de condições LMI baseadas na estabilidade quadrática. Esses problemas são rapidamente apresentados na seqüência.

1.3 Problemas estudados e estrutura da tese

Na primeira parte deste trabalho, são apresentadas condições convexas de dimensão finita para a análise de \mathcal{D} -estabilidade de dois problemas fundamentais da teoria de controle. No Capítulo 2, é investi-

gado o uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetro para analisar a \mathcal{D} -estabilidade de sistemas lineares incertos descritos por

$$\delta[x(t)] = A(\alpha)x(t),$$

em que $\delta[\cdot]$ denota a derivada em relação ao tempo para os sistemas contínuos no tempo e o operador avanço para os sistemas discretos no tempo e $A(\alpha)$ é uma matriz incerta invariante no tempo com $\alpha \in \mathbb{R}^N$, $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \dots, N$, $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$. Este problema tem sido amplamente estudado nos últimos anos, sobretudo por meio de ferramentas baseadas em LMIs, conforme pode ser atestado pelos trabalhos [GAC96], [PABB00], [dOBG99], [RP01a], [RP02], [LP03a]. Nesse contexto, uma discussão sobre as condições de existência de soluções polinomiais para LMIs dependentes de parâmetro pode ser encontrada em [Bli04b]. Em [CGTV03] são apresentadas condições LMI para a existência funções de Lyapunov quadráticas no estado e polinomiais homogêneas nos parâmetros incertos baseadas em representações matriciais de quadrados completos. Uma família de condições LMI cada vez mais precisas para a estabilidade de sistemas incertos descritos na representação afim é dada em [Bli04a]. As condições tornam-se necessárias para um número suficientemente grande de LMIs, que estão associadas à existência de uma função de Lyapunov polinomial nos parâmetros. O procedimento pode ser usado de maneira recursiva para tratar sistemas politópicos.

O outro problema investigado nessa primeira parte do trabalho trata da \mathcal{D} -estabilidade de matrizes polinomiais, isto é, no caso em que $A(\alpha)$ é uma matriz cujas entradas são polinômios (incertos), tratado no Capítulo 3. As matrizes polinomiais constituem um ferramental importante para o estudo de sistemas de controle, pois a dinâmica de muitos sistemas pode ser descrita de maneira mais natural por meio de representações lineares fracionais ou por matrizes cujos coeficientes são polinômios [KV93]. Nesse contexto, várias abordagens para a análise de estabilidade robusta e para o controle de sistemas se baseiam em matrizes polinomiais, como, por exemplo, as chamadas abordagem polinomial [Kuč79] e abordagem comportamental [Wil91]. No caso da descrição de um sistema por matrizes fracionais, a matriz polinomial correspondente ao denominador fornece informações sobre a dinâmica e a estabilidade do sistema [Kai80], e o posicionamento dos zeros da matriz polinomial correspondente ao numerador está associado às especificações de desempenho do sistema [Ack93]. Uma boa discussão sobre a importância de matrizes polinomiais, a análise da estabilidade robusta de polinômios e a evolução dos métodos numéricos para a verificação das condições de estabilidade pode ser encontrada em [HAPŠ01] e [HBŠ01]. Para um estudo mais aprofundado sobre a natureza e propriedades gerais das matrizes polinomiais, recomenda-se [GLR82]. Note-se que, na presença de parâmetros incertos, a análise da estabilidade robusta de sistemas dinâmicos passa pela verificação da estabilidade de matrizes polinomiais incertas, e uma das formas mais gerais de representação de incertezas paramétricas é a politópica [Bar94]. Portanto, no Capítulo 3, são apresentadas condições convexas de dimensão finita suficientes para a análise de \mathcal{D} -estabilidade de politopos de matrizes polinomiais. Os resultados apresentados contêm e estendem aqueles de [dOP02], [HBŠ01] e [HAPŠ01].

Na Parte II, são estudados sistemas lineares incertos com atraso nos estados, que ocorrem frequentemente em muitos sistemas dinâmicos e que podem afetar a estabilidade dos mesmos (veja-se [DV97], [Mah00], [Hal77], [KR99], [MZJ87], [Nic01] e referências internas). O uso de funcionais de Lyapunov-Krasovskii é, sem dúvida, uma das principais abordagens utilizadas para a análise de estabilidade desse tipo de sistema [KNR99], [Sko90], e tem havido um esforço significativo para a caracterização da estabilidade robusta por meio de LMIs. Em [ZKT01], é mostrado como algumas condições obtidas por meio de funcionais de Lyapunov-Krasovskii podem ser verificadas como casos particulares de uma abordagem

frequencial baseada em técnicas de análise- μ . No entanto, os resultados apresentados são restritos ao caso exato.

Para a classe de sistemas lineares com atraso nos estados, existem dois tipos de condições para a análise de estabilidade: as que são dependentes do atraso e as que são independentes do atraso. No primeiro caso, as condições visam garantir a estabilidade de um sistema com atraso nos estados para todos os valores do atraso $\tau \in [0, \bar{\tau}]$, sendo que $\bar{\tau}$ denota o máximo valor assumido por τ . As condições independentes do atraso são capazes de garantir (quando satisfeitas) a estabilidade de sistemas com atraso para qualquer valor (positivo) de τ . Como, na maioria das vezes, as condições dependentes do atraso são apenas suficientes, nem sempre é possível caracterizar adequadamente a estabilidade de um sistema com atrasos nos estados. Neste trabalho são desenvolvidas condições do tipo independente do atraso para sistemas incertos.

No Capítulo 4, uma classe mais ampla de sistemas lineares com atraso é estudada: os sistemas neutrais. Esse tipo de sistema possui uma equação dinâmica dependente do estado atual, do estado atrasado e da derivada do estado atrasado, sendo modelado por equações diferenciais hiperbólicas [Hal77] do tipo

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta(x_\tau) = A(\alpha)x(t) + A_h(\alpha)x(t - h(t)) \quad (1.9)$$

$$\Delta(x_\tau) \triangleq x(t) - E(\alpha)x(t - \tau(t)) \quad (1.10)$$

Note-se que este tipo de sistema contém a classe (mais conhecida) dos sistemas contínuos no tempo com atraso nos estados, cuja dinâmica depende apenas do estado atual e do estado atrasado, isto é, supondo $E(\alpha) = \mathbf{0} \forall \alpha$ em (1.9). Nesse capítulo, são apresentadas condições suficientes, baseadas em funcionais de Lyapunov-Krasovskii dependentes de parâmetro, que são menos conservadoras que outras disponíveis na literatura, considerando-se aqui a situação mais abrangente de atrasos variantes no tempo. É ainda mostrado como condições mais simples para a análise de estabilidade robusta podem ser obtidas por meio de transformações de congruência aplicadas às condições mais gerais, quando uma ou mais matrizes da equação dinâmica (1.9) são nulas.

Por último, no Capítulo 5, sistemas discretos no tempo com atraso nos estados são estudados, também por meio de condições independentes do atraso. Note-se que, embora exista uma vasta literatura a respeito de sistemas contínuos no tempo com atraso nos estados, o mesmo não ocorre com o caso discreto no tempo. De fato, para atrasos conhecidos e fixos no tempo, é sempre possível incluir estados atrasados em um vetor de estados e aplicar técnicas-padrão (de análise) ao sistema aumentado [ÅW84]. Entretanto, dentre outras dificuldades, tais como o aumento da complexidade e a necessidade de imposição de restrições estruturais ao ganho de realimentação de estados para obter um ganho de realimentação de estados para o estado original, essa estratégia não é aplicável para o caso de atrasos desconhecidos ou não limitados, pois, nesse caso, seria necessário o teste de um número infinito de sistemas aumentados. Além disso, a representação por estados aumentados pode ser bastante complexa para o projeto de uma lei de controle para o sistema original, que considere uma realimentação dos estados atrasados. Observe-se ainda que as condições para estabilização de sistemas discretos no tempo por meio de condições do tipo dependente do atraso podem ser, quase sempre, bastante conservadoras, especialmente quando o sistema é estabilizável para qualquer valor do atraso. Nesse sentido, os resultados do Capítulo 5 proporcionam condições independentes do atraso mais precisas (portanto, menos conservadoras) para investigar a estabilidade robusta desta classe

de sistemas, bem como para tratar os problemas de cômputo de custo garantido \mathcal{H}_∞ e estabilização robusta \mathcal{H}_∞ .

No Capítulo 6, são apresentados os comentários finais sobre o uso de funções de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetro nos problemas estudados e alguns temas selecionados como perspectivas para continuação da pesquisa. É ainda apresentada uma lista de outros trabalhos desenvolvidos, relacionados de maneira indireta com os assuntos tratados aqui.

1.4 Comentários gerais

Neste trabalho, é tratada a estabilidade assintótica, sempre considerando a origem como ponto de equilíbrio. Frequentemente, este conceito de estabilidade é referido de forma simplificada como “estabilidade”. Assim, quando é indicado que um sistema é estável, deve-se entender que seu vetor de estados converge assintoticamente para a origem do espaço de estados, para toda condição inicial diferente de zero, quando o tempo tende a infinito.

Supõe-se que todos os sistemas incertos investigados neste trabalho possuem matrizes incertas que pertencem a politopos convexos com número de vértices finitos e conhecidos.

Os resultados dos exemplos numéricos apresentados neste trabalho foram obtidos a partir da programação das condições LMI estudadas em Matlab, utilizando o *LMI Control Toolbox* [GNLC95]. Neste caso, por utilizar um algoritmo de pontos interiores para a solução das LMIs, a complexidade dos problemas de otimização propostos é da ordem de $\mathcal{O}(\mathcal{K}^3\mathcal{L})$, em que \mathcal{K} é o número de variáveis escalares de otimização e \mathcal{L} é o número de linhas nas LMIs. Outros algoritmos de otimização podem apresentar uma complexidade diferente. Por exemplo, utilizando o programa SeDuMi para resolver um problema de programação semidefinida, a complexidade é da ordem de $\mathcal{O}(\mathcal{K}^2\mathcal{L}^{5/2} + \mathcal{L}^{7/2})$. Para detalhes, veja-se [Stu99].

Parte I

\mathcal{D} -estabilidade robusta

Nesta primeira parte do trabalho, são apresentados resultados menos conservadores do que os encontrados na literatura para a análise de \mathcal{D} -estabilidade robusta de sistemas lineares incertos e de polinômios matriciais incertos, em relação a uma região (convexa) do plano complexo. Isto é, a investigação da pertinência de todos os autovalores de sistemas lineares incertos ou dos zeros de polinômios matriciais incertos a uma região pré-determinada — no caso assumida convexa — do plano complexo. Embora esse problema seja reconhecidamente de difícil solução, os resultados obtidos são apresentados em formulações convexas (LMIs), baseadas em testes simples de factibilidade. Esses testes podem ser resolvidos numericamente de maneira eficiente por meio de algoritmos especializados de pontos interiores. Nos capítulos que seguem, são apresentados exemplos ilustrativos da eficiência e abrangência das condições estudadas. São, inicialmente, propostas condições convexas para a solução do problema de análise de \mathcal{D} -estabilidade robusta, porém de dimensão infinita no parâmetro de incerteza. Propõem-se então condições convexas suficientes para assegurar a factibilidade das condições de dimensão infinita no parâmetro de incerteza. Essas novas condições, formuladas em um número finito de LMIs, são numericamente viáveis e de fácil implementação.

Capítulo 2

\mathcal{D} -estabilidade robusta de sistemas lineares

Neste capítulo, o problema de análise de \mathcal{D} -estabilidade robusta para a classe dos sistemas lineares incertos e invariantes no tempo é estudado. Por \mathcal{D} -estabilidade, entende-se a pertinência de todos os autovalores do sistema incerto a uma região \mathcal{D} do plano complexo. As incertezas são consideradas com representação na forma politópica, com vértices conhecidos. São apresentadas condições convexas (LMIs) suficientes para a verificação da \mathcal{D} -estabilidade robusta dessa classe de sistemas incertos. As condições apresentadas, baseadas em funções de Lyapunov dependentes de parâmetro, possuem uma formulação convexa nas variáveis de otimização, sendo, no entanto, de dimensão infinita no parâmetro de incerteza. Dessas condições, são obtidas outras, de dimensão finita no parâmetro de incerteza, também convexas em relação às variáveis de otimização. Neste caso, o número de LMIs é maior que o número de vértices que definem o politopo, porém as condições podem ser resolvidas em tempo polinomial por algoritmos especializados de pontos interiores. É mostrado que essas condições levam a resultados bem menos conservadores do que aqueles obtidos, por exemplo, por meio da estabilidade quadrática, isto é, com função de Lyapunov fixa e independente da incerteza associada ao sistema. Uma comparação numérica entre várias condições existentes na literatura é apresentada tanto para o caso de sistemas contínuos no tempo quanto para sistemas discretos no tempo. Ao final deste capítulo, vários exemplos ilustrativos da eficiência das condições propostas são apresentados. Os resultados apresentados neste capítulo podem ser parcialmente encontrados em [LP03a], [LP03b], [LMd⁺04], [LMRP02], [dOOL⁺02a] e [dOOL⁺02b].

2.1 Introdução

Embora várias abordagens para o estudo de estabilidade de sistemas incertos estejam disponíveis na literatura, neste capítulo são considerados os métodos baseados em formulações do tipo LMI e incertezas pertencentes a domínios politópicos, com foco em sistemas lineares invariantes no tempo. De particular interesse é o estudo de estabilidade robusta de sistemas lineares incertos contínuos e discretos no tempo.

Nesse contexto, várias condições baseadas em funções de Lyapunov dependentes de parâmetro merecem destaque. Dentre elas, considere-se aquela proposta em [GdOH98], que trata da estabilidade robusta de sistemas lineares contínuos e invariantes no tempo. Nesse trabalho, condições suficientes para a estabilidade estrutural de uma classe de sistemas contínuos no tempo foram propostas em termos de LMIs,

sendo estabelecidas as conexões desse resultado com a positividade real e a passividade em sistemas lineares. A idéia principal contida nessa abordagem está no aumento da ordem das LMIs e na inclusão de novas variáveis matriciais, de maneira a obter, com esses graus de liberdade adicionais, resultados menos conservadores do que os conseguidos com a estabilidade quadrática. Uma propriedade fundamental das condições é a separação do produto da matriz dinâmica do sistema e da matriz de Lyapunov. Nesse caso, a estabilidade robusta é garantida por uma função de Lyapunov dependente de parâmetro, construída a partir de matrizes de Lyapunov que são soluções factíveis para um conjunto de LMIs descritas nos vértices do domínio de incertezas (formulação das incertezas em um domínio politópico). Apesar de fornecer resultados melhores do que os obtidos com a estabilidade quadrática, essas condições (chamadas aqui de estabilidade robusta estendida – EE) ainda são conservadoras quando comparadas com o real domínio de estabilidade, provavelmente pelo fato de exigirem que uma ou mais variáveis satisfaçam conjuntamente todas as LMIs. Condições menos conservadoras (notadamente para casos de maiores dimensões) foram apresentadas em [RP01b] e [RP02], baseadas na construção apropriada de um número maior de LMIs descritas em função dos vértices do politopo de incertezas, denominadas neste trabalho de estabilidade robusta (ER_1 para o caso discreto no tempo e ER_2 para o caso contínuo no tempo).

Em relação a sistemas discretos no tempo, os testes de estabilidade evoluíram de maneira bastante similar. Dentre os testes baseados em funções de Lyapunov dependentes de parâmetro destacam-se as abordagens LMI apresentadas em [dOBG99], [dOGH99] (aumento da ordem das LMIs e inclusão de novas variáveis) e, mais recentemente, em [RP01a] (aumento do número de LMIs).

Uma linha mais ampla de investigação de estabilidade passa pelo estudo de regiões mais gerais de estabilidade. Nesse contexto, as regiões de estabilidade para sistemas contínuos no tempo (semi-plano complexo esquerdo aberto), bem como para sistemas discretos no tempo (disco unitário aberto centrado na origem do plano complexo), podem ser vistas como casos particulares, falando-se em \mathcal{D} -estabilidade (robusta), isto é, a pertinência de todos os autovalores do sistema incerto a uma região \mathcal{D} do plano complexo. Uma vantagem imediata é que o teste de estabilidade robusta fica, de certo modo, estendido a uma região de “desempenho garantido” em termos de alocação regional de pólos. É importante citar o trabalho de [GJ81] no contexto da análise de \mathcal{D} -estabilidade. Em [CG96] é proposto o projeto de controladores que minimizam a norma \mathcal{H}_∞ com alocação regional de pólos, para o qual são consideradas as regiões de primeira ordem (veja [Bac98] para detalhes). Porém, nesse trabalho a estabilidade quadrática ainda é utilizada e, portanto, um certo grau de conservadorismo é inerente aos resultados. Uma extensão dos resultados de [GdOH98] é apresentada em [PABB00], em que, por meio de uma generalização das regiões tratadas por [CG96], diferentes regiões convexas de primeira ordem dentro do plano complexo são consideradas. Em [PABB00], condições convexas em termos de LMIs são propostas, fazendo-se uso de variáveis matriciais extras independentes do parâmetro de incerteza do sistema para a análise de \mathcal{D} -estabilidade robusta. Os resultados de análise apresentados em [PABB00] contêm os de [dOBG99], no caso de análise de estabilidade robusta de sistemas discretos no tempo. Para a síntese, as propostas são idênticas para o caso discreto no tempo. Note-se que os resultados de análise de estabilidade apresentados em [PABB00] podem ser facilmente adaptados para o caso de síntese de ganho robusto sempre que a região do plano complexo for descrita com $R_{22} > \mathbf{0}$ (veja, adiante, equações (2.3)-(2.4)). É interessante comentar que tanto [PABB00] quanto [RP01a] e [RP02] contêm a estabilidade quadrática como um caso particular, no sentido de que sempre fornecem uma solução factível, quando o politopo de incertezas é quadraticamente estável, mas são, no entanto, independentes: uma condição pode encontrar solução

factível para um caso no qual a outra falha e vice-versa.

Neste capítulo, uma extensão dos resultados de [PABB00], de forma a obter-se um conjunto finito de condições convexas que assegurem a \mathcal{D} -estabilidade robusta de sistemas incertos, ainda considerando-se regiões de primeira ordem, é apresentada. A principal diferença é que, aqui, as variáveis matriciais extras também são consideradas dependentes do parâmetro incerto. As principais idéias de aumento no número de LMIs para redução do conservadorismo das condições de análise presentes em [RP01a] e [RP02] são utilizadas para obter condições convexas de dimensão finita. Assim como as demais condições, as LMIs aqui propostas podem ser testadas por métodos de eficiência numérica comprovada e de complexidade polinomial [GNLC95]. Os casos contínuo e discreto no tempo são abordados como casos particulares de \mathcal{D} -estabilidade. Uma comparação numérica é feita entre os resultados obtidos com a estabilidade quadrática, a \mathcal{D} -estabilidade robusta proposta em [PABB00], a estabilidade robusta proposta em [RP01a] (para o caso discreto no tempo) e em [RP02] (para o caso contínuo no tempo) e com as condições aqui apresentadas, para um conjunto de politopos estáveis. Uma análise da complexidade numérica das LMIs envolvidas em cada tipo de teste também é apresentada. Além de mostrar que as condições propostas neste capítulo produzem sempre os resultados menos conservadores, os testes numéricos proporcionam uma estimativa da proximidade com as condições necessárias de estabilidade. Vários exemplos ilustrativos são também apresentados.

2.2 Preliminares

Considere-se o sistema linear

$$\delta[x(t)] = A(\alpha)x(t), \quad (2.1)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $\delta[\cdot]$ representa a derivada em relação ao tempo para os sistemas contínuos no tempo e o operador avanço para os sistemas discretos no tempo e a matriz $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é desconhecida porém pertence ao conjunto convexo \mathcal{A}

$$\mathcal{A} = \left\{ A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n} : A(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j; \quad \alpha_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, N; \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 \right\}, \quad (2.2)$$

em que os vértices A_j , $j = 1, \dots, N$, são conhecidos. Considere-se ainda a região do plano complexo definida por

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} \mathbf{I}_d & z\mathbf{I}_d \end{bmatrix} \mathcal{R} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_d & z\mathbf{I}_d \end{bmatrix}^* < \mathbf{0} \right\}, \quad (2.3)$$

com $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{2d \times 2d}$, simétrico, dado por

$$\mathcal{R} = \left[\begin{array}{c|c} R_{11} & R_{12} \\ \hline R'_{12} & R_{22} \end{array} \right], \quad (2.4)$$

em que d é a ordem da região. É assumido que $R_{22} \geq \mathbf{0}$ e, portanto, \mathcal{D} definida em (2.3) representa regiões convexas e simétricas em relação ao eixo real do plano complexo (veja-se [PABB00] para detalhes). Observe-se ainda que as regiões associadas à estabilidade de sistemas contínuos e discretos no tempo, respectivamente o semi-plano complexo esquerdo e o disco unitário centrado na origem, são recuperadas com escolhas adequadas de \mathcal{R} e $d = 1$

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_C = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right]; \quad \mathcal{R} = \mathcal{R}_D = \left[\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (2.5)$$

Definição 2.1 O politopo \mathcal{A} é robustamente \mathcal{D} -estável se todos os autovalores de $A(\alpha) \in \mathcal{A}$ pertencem à região \mathcal{D} especificada por (2.3).

Seguindo as idéias de [CG96], uma condição baseada em função de Lyapunov dependente de parâmetro, que verifica se $A(\alpha)$ é \mathcal{D} -estável, é proposta no lema seguinte, conforme apresentado em [PABB00].

Lema 2.1 O politopo \mathcal{A} é robustamente \mathcal{D} -estável se e somente se existir uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetro, simétrica, definida positiva, $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que

$$R_{11} \otimes P(\alpha) + R_{12} \otimes (P(\alpha)A(\alpha)) + R'_{12} \otimes (A(\alpha)'P(\alpha)) + R_{22} \otimes (A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha)) < \mathbf{0} \quad (2.6)$$

para todo $A(\alpha) \in \mathcal{A}$.

Prova: A prova segue passos similares aos apresentados no Apêndice de [CG96]. ■

Vale ressaltar que a abordagem utilizada em [RP01a] pode ser empregada aqui para tratar o problema de dimensão infinita em α presente no Lema 2.1. Ainda, pode-se observar que, se $P(\alpha) = P$, então a chamada \mathcal{D} -estabilidade quadrática é recuperada a partir do Lema 2.1.

Definição 2.2 O politopo \mathcal{A} é quadraticamente \mathcal{D} -estável se existir uma matriz de Lyapunov simétrica, definida positiva, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que

$$R_{11} \otimes P + R_{12} \otimes (PA(\alpha)) + R'_{12} \otimes (A(\alpha)'P) + R_{22} \otimes (A(\alpha)'PA(\alpha)) < \mathbf{0} \quad (2.7)$$

para todo $A(\alpha) \in \mathcal{A}$.

O lema seguinte propõe uma condição equivalente ao Lema 2.1, desta vez utilizando-se variáveis matriciais extras e uma LMI de dimensão maior que a empregada em (2.6).

Lema 2.2 O politopo \mathcal{A} é robustamente \mathcal{D} -estável se e somente se existir uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetro, simétrica definida positiva, $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes dependentes de parâmetro $F(\alpha) \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$ e $G(\alpha) \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$ tais que

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} R_{11} \otimes P(\alpha) \\ + F(\alpha)(\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')F(\alpha)' \\ \star \end{array} & \begin{array}{c} R_{12} \otimes P(\alpha) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')G(\alpha) - F(\alpha) \\ R_{22} \otimes P(\alpha) - (G(\alpha) + G(\alpha)') \end{array} \end{array} \right] < \mathbf{0} \quad (2.8)$$

para todo $A(\alpha) \in \mathcal{A}$. Além disso, $P(\alpha)$ solução de (2.8) é também solução de (2.6).

Prova: Essa prova segue passos semelhantes aos apresentados na prova do Teorema 3 de [PABB00]. A suficiência pode ser verificada, observando-se que o lado esquerdo de (2.6) pode ser obtido pré-multiplicando-se o lado esquerdo de (2.8) por $T(\alpha)$ e pós-multiplicando-se por $T(\alpha)'$, com $T(\alpha)$ de posto completo dada por

$$T(\alpha) = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{I}_d \otimes \mathbf{I}_n & \mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)' \end{array} \right]. \quad (2.9)$$

A necessidade pode ser verificada da seguinte forma: se (2.6) é verificada para $P(\alpha)$, então existe um escalar $\varepsilon(\alpha) \in \mathbb{R}_+$, tal que

$$\begin{aligned} R_{11} \otimes P(\alpha) + R_{12} \otimes (P(\alpha)A(\alpha)) + R'_{12} \otimes (A(\alpha)'P(\alpha)) \\ + R_{22} \otimes (A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha)) < -\varepsilon(\alpha)\mathbf{I}_d \otimes (A(\alpha)'A(\alpha)), \end{aligned} \quad (2.10)$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} R_{11} \otimes P(\alpha) + R_{12} \otimes (P(\alpha)A(\alpha)) + R'_{12} \otimes (A(\alpha)'P(\alpha)) \\ + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha))'(R_{22} \otimes P(\alpha) + \varepsilon(\alpha)\mathbf{I}_{dn})(\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)) < \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.11)$$

e como $R_{22} \geq \mathbf{0}$, $P(\alpha) > \mathbf{0}$, $\varepsilon(\alpha) \in \mathbb{R}_+$, então $R_{22} \otimes P(\alpha) + \varepsilon(\alpha)\mathbf{I}_{dn} > \mathbf{0}$, o que permite que a desigualdade matricial (2.11) possa ser escrita como em (2.8) (usando complemento de Schur) com as escolhas $G(\alpha) = R_{22} \otimes P(\alpha) + \varepsilon(\alpha)/2\mathbf{I}_{dn}$ e $F(\alpha) = R_{12} \otimes P(\alpha) - \varepsilon(\alpha)/2(\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha))'$ completando a prova. \blacksquare

Observe-se que as condições propostas nos Lemas 2.1 e 2.2 são convexas nas variáveis de otimização, porém são de dimensão infinita em α , significando que um esforço computacional bastante grande é necessário para verificá-las (no caso de α possuir algum intervalo contínuo em seu domínio). Além disso, as condições estabelecidas nesses dois lemas não exigem que a matriz $A(\alpha)$ pertença ao conjunto convexo \mathcal{A} , equação (2.2), pois tais condições precisam ser verificadas para todo α no domínio de incerteza.

Na seqüência, é apresentado o resultado principal deste capítulo, que é uma condição convexa de dimensão finita suficiente para a verificação do Lema 2.2 no caso de \mathcal{A} dado em (2.2).

2.3 Condições para \mathcal{D} -estabilidade do politopo \mathcal{A}

Assuma-se que as matrizes $F(\alpha)$, $G(\alpha)$ e $P(\alpha) = P(\alpha)' > \mathbf{0}$ no Lema 2.2 possam ser expressas como uma combinação convexa de matrizes vértices como segue

$$P(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j P_j ; \quad F(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j F_j ; \quad G(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j G_j ; \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 ; \quad \alpha_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (2.12)$$

Então, uma condição suficiente para a \mathcal{D} -estabilidade robusta de \mathcal{A} é dada pelo teorema seguinte.

Teorema 2.1 *Se existem matrizes simétricas definidas positivas $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $F_j \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$, $G_j \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$, $j = 1, \dots, N$, tais que*

$$M_j \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} R_{11} \otimes P_j \\ + F_j(\mathbf{I}_d \otimes A_j) + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)F'_j \end{array} & R_{12} \otimes P_j + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)G_j - F_j \\ \hline \star & R_{22} \otimes P_j - (G_j + G'_j) \end{array} \right] < \left[\begin{array}{c|c} -(\mathbf{I}_d \otimes \mathbf{I}_n) & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N \quad (2.13)$$

$$M_{jk} \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} R_{11} \otimes (2P_j + P_k) + F_j(\mathbf{I}_d \otimes A_k) \\ + (\mathbf{I}_d \otimes A'_k)F'_j + (F_j + F_k)(\mathbf{I}_d \otimes A_j) \\ + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)(F'_j + F'_k) \end{array} & \begin{array}{l} R_{12} \otimes (2P_j + P_k) + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)(G_j + G_k) \\ + (\mathbf{I}_d \otimes A'_k)G_j - (2F_j + F_k) \end{array} \\ \hline \star & \begin{array}{l} R_{22} \otimes (2P_j + P_k) \\ - 2(G_j + G'_j) - (G_k + G'_k) \end{array} \end{array} \right] \\ < \frac{1}{(N-1)^2} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_d \otimes \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N; k = 1, \dots, N; k \neq j \quad (2.14)$$

$$M_{jkl} \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} 2R_{11} \otimes (P_j + P_k + P_\ell) \\ + (F_j + F_\ell)(\mathbf{I}_d \otimes A_k) + (\mathbf{I}_d \otimes A'_k)(F'_j + F'_\ell) \\ + (F_j + F_k)(\mathbf{I}_d \otimes A_\ell) + (\mathbf{I}_d \otimes A'_\ell)(F'_j + F'_k) \\ + (F_k + F_\ell)(\mathbf{I}_d \otimes A_j) + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)(F'_k + F'_\ell) \end{array} & \begin{array}{l} 2[R_{12} \otimes (P_j + P_k + P_\ell) \\ - (F_j + F_k + F_\ell)] \\ + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)(G_k + G_\ell) \\ + (\mathbf{I}_d \otimes A_k)(G_j + G_\ell) \\ + (\mathbf{I}_d \otimes A'_\ell)(G_j + G_k) \end{array} \\ \hline \star & \begin{array}{l} R_{22} \otimes 2(P_j + P_k + P_\ell) \\ - 2(G_j + G_k + G_\ell) \\ - 2(G'_j + G'_k + G'_\ell) \end{array} \end{array} \right] \\ < \frac{6}{(N-1)^2} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_d \otimes \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N-2; k = j+1, \dots, N-1; \ell = k+1, \dots, N \quad (2.15)$$

são verificadas, então \mathcal{A} é robustamente \mathcal{D} -estável e as condições do Lema 2.2 são verificadas com $P(\alpha)$, $F(\alpha)$ e $G(\alpha)$ dadas em (2.12). Além disso, as condições do Lema 2.1 são satisfeitas com essa mesma $P(\alpha)$.

Prova: $P(\alpha)$ dada por (2.12) com $P_j > \mathbf{0}$ é claramente uma matriz dependente de parâmetro definida positiva. Usando novamente (2.12) e $A(\alpha) \in \mathcal{A}$, é possível escrever

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} R_{11} \otimes P(\alpha) \\ + F(\alpha)(\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')F(\alpha)' \end{array} & \begin{array}{l} R_{12} \otimes P(\alpha) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')G(\alpha) - F(\alpha) \end{array} \\ \hline \star & R_{22} \otimes P(\alpha) - (G(\alpha) + G(\alpha)') \end{array} \right] = \\ \sum_{j=1}^N \alpha_j^3 M_j + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1; k \neq j}^N \alpha_j^2 \alpha_k M_{jk} + \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=j+1}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \alpha_j \alpha_k \alpha_\ell M_{jkl} \quad (2.16)$$

Impondo (2.13)-(2.15) e considerando que $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \dots, N$, $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$, a equação (2.16) implica que

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} R_{11} \otimes P(\alpha) \\ + F(\alpha)(\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)') + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha))F(\alpha)' \end{array} & \begin{array}{l} R_{12} \otimes P(\alpha) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')G(\alpha) - F(\alpha) \end{array} \\ \hline \star & R_{22} \otimes P(\alpha) - (G(\alpha) + G(\alpha)') \end{array} \right] < \\ - \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^3 - \frac{1}{(N-1)^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j; k=1}^N \alpha_j^2 \alpha_k - \frac{6}{(N-1)^2} \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=j+1}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \alpha_j \alpha_k \alpha_\ell \right) \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_d \otimes \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (2.17)$$

Definindo ϕ_1 e ϕ_2 como

$$\phi_1 \triangleq \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_j (\alpha_j - \alpha_k)^2 = (N-1) \sum_{j=1}^N \alpha_j^3 - \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j; k=1}^N \alpha_j^2 \alpha_k \geq 0 \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned}
\phi_2 &\triangleq \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k \neq j; k=1}^{N-1} \sum_{\ell \neq j, k; \ell=2}^N \alpha_j (\alpha_k - \alpha_\ell)^2 \\
&= (N-2) \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j; k=1}^N \alpha_j^2 \alpha_k - 6 \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=j+1}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \alpha_j \alpha_k \alpha_\ell \geq 0 \quad (2.19)
\end{aligned}$$

é possível mostrar que $(N-1)\phi_1 + \phi_2 \geq 0$, implicando que (2.8) é verificada. \blacksquare

Algumas observações em relação às LMIs (2.13)–(2.15) e (2.17) são necessárias. Primeiramente, observe-se que todas essas LMIs apresentam a propriedade da homogeneidade, implicando que a matriz do lado direito de (2.17) pode ser escolhida de forma arbitrária, desde que seja semidefinida positiva. Neste trabalho, matrizes independentes do parâmetro de incerteza são consideradas. Entretanto, algum grau extra de liberdade é esperado quando essa matriz é substituída por uma dependente do parâmetro incerto, mas esse caso não é investigado aqui (veja-se, por exemplo, [LKH04]).

Para sistemas precisamente conhecidos, isto é, com $N = 1$, apenas a condição (2.13) precisa ser verificada (com P_1 , F_1 e G_1). Naturalmente, o conjunto de LMIs (2.15) precisa ser verificado somente para sistemas incertos com $N \geq 3$.

Como ilustração de regiões mais comumente utilizadas para a análise de estabilidade, considere-se as regiões correspondentes ao semi-plano esquerdo e ao círculo unitário centrado na origem (definidas respectivamente por \mathcal{R}_C e \mathcal{R}_D , em (2.5)). Para essas regiões, o Teorema 2.1 tem as matrizes M_j , M_{jk} e M_{jkl} dadas por

$$M_j \equiv M_j^C \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \frac{F_j A_j + A'_j F'_j}{\star} & \begin{array}{c} P_j + A'_j G_j - F_j \\ -G_j - G'_j \end{array} \end{array} \right] < \left[\begin{array}{c|c} -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}
M_{jk} \equiv M_{jk}^C &\triangleq \left[\begin{array}{c|c} \frac{F_j A_k + A'_k F'_j + (F_j + F_k) A_j + A'_j (F'_j + F'_k)}{\star} & \begin{array}{c} 2P_j + P_k + A'_j (G_j + G_k) \\ + A'_k G_j - 2F_j - F_k \end{array} \end{array} \right] \\
&< \frac{1}{(N-1)^2} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N; k = 1, \dots, N; k \neq j \quad (2.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{jkl} \equiv M_{jkl}^C &\triangleq \left[\begin{array}{c|c} \frac{\begin{array}{l} (F_j + F_\ell) A_k + A'_k (F'_j + F'_\ell) \\ + (F_j + F_k) A_\ell + A'_\ell (F'_j + F'_k) \\ + (F_k + F_\ell) A_j + A'_j (F'_k + F'_\ell) \end{array}}{\star} & \begin{array}{c} 2(P_j + P_k + P_\ell - F_j + F_k + F_\ell) \\ + A'_j (G_k + G_\ell) + A'_k (G_j + G_\ell) \\ + A'_\ell (G_j + G_k) \\ - 2(G_j + G_k + G_\ell) \\ + G'_j + G'_k + G'_\ell \end{array} \end{array} \right] \\
&< \frac{6}{(N-1)^2} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N-2; k = j+1, \dots, N-1; \ell = k+1, \dots, N \quad (2.22)
\end{aligned}$$

para sistemas contínuos no tempo e

$$M_j \equiv M_j^D \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \frac{-P_j + F_j A_j + A'_j F'_j}{\star} & \begin{array}{c} A'_j G_j - F_j \\ P_j - (G_j + G'_j) \end{array} \end{array} \right] < \left[\begin{array}{c|c} -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N \quad (2.23)$$

$$M_{jk} \equiv M_{jk}^D \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} -(2P_j + P_k) + F_j A_k + A'_k F'_j \\ (F_j + F_k) A_j + A'_j (F'_j + F'_k) \end{array} & \begin{array}{l} A'_j (G_j + G_k) \\ + A'_k G_j - (2F_j + F_k) \end{array} \\ \hline \star & \begin{array}{l} 2P_j + P_k \\ -2(G_j + G'_j) - (G_k + G'_k) \end{array} \end{array} \right] \\ < \frac{1}{(N-1)^2} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N; k = 1, \dots, N; k \neq j \quad (2.24)$$

$$M_{jkl} \equiv M_{jkl}^D \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} -2(P_j + P_k + P_\ell) \\ +(F_j + F_\ell) A_k + A'_k (F'_j + F'_\ell) \\ +(F_j + F_k) A_\ell + A'_\ell (F'_j + F'_k) \\ +(F_k + F_\ell) A_j + A'_j (F'_k + F'_\ell) \end{array} & \begin{array}{l} -2(F_j + F_k + F_\ell) + (G_k + A'_j G_\ell) \\ + A'_k (G_j + G_\ell) + A'_\ell (G_j + G_k) \end{array} \\ \hline \star & \begin{array}{l} 2(P_j + P_k + P_\ell - G_j - G_k - G_\ell) \\ -G'_j - G'_k - G'_\ell \end{array} \end{array} \right] \\ < \frac{6}{(N-1)^2} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N-2; k = j+1, \dots, N-1; \ell = k+1, \dots, N \quad (2.25)$$

para sistemas discretos no tempo.

Note-se ainda que, o resultado principal apresentado em [PABB00] pode ser recuperado das condições do Teorema 2.1, simplesmente fazendo-se $F_j = F$, $G_j = G$, $j = 1, \dots, N$ e usando-se a propriedade da homogeneidade das LMIs. No caso da \mathcal{D} -estabilidade quadrática, apenas (2.13) precisa ser avaliada pois, nestes casos, (2.14) e (2.15) são sempre verificadas. Este fato pode ser comprovado pela soma de versões da equação (2.13).

As condições do Teorema 2.1 podem ainda recuperar uma condição Schur-equivalente às apresentadas em [RP01a], formuladas para o caso discreto no tempo, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_D$. Para isso, impõe-se $F_j = \mathbf{0}$ e $G_j = G'_j = P_j$, $j = 1, \dots, N$ em (2.23)-(2.25). Para o caso contínuo no tempo, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_C$, a escolha $F_j = F'_j = P_j$, $j = 1, \dots, N$ em (2.20)-(2.22) recupera nos blocos (1, 1) das LMIs resultados menos conservadores que os apresentados em [RP02], por causa do maior grau em α utilizado em (2.17), conforme discutido a seguir.

A principal diferença entre as abordagens apresentadas em [RP01a] e [RP02] é o grau em α_j no qual o lado direito de (2.16) é escrito. Em [RP01a], é utilizada uma função de grau três, assim como nas condições do Teorema 2.1 (veja (2.17)), enquanto que em [RP02], uma função de grau dois é empregada. Experimentos numéricos têm demonstrado que o aumento do grau da função em α_j no lado direito de (2.17) leva a condições cada vez menos conservadoras e a um custo computacional cada vez mais elevado. O aumento da ordem dessa função em α_j pode ser conseguido, por exemplo, pela multiplicação sucessiva em ambos os lados de (2.17) por qualquer potência de $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$. A obtenção de condições cada vez menos conservadoras por meio dessa técnica possui conexões com o Teorema de Pólya (veja-se [HLP52]), ficando a investigação dessas condições para trabalhos futuros.

Um resultado similar ao apresentado no Teorema 2.1 pode ser obtido de forma análoga, utilizando-se as idéias apresentadas em [RP02], isto é, utilizando-se uma expressão de grau dois ao invés de grau três no lado direito de (2.16) e (2.17). Essas condições possuem complexidade numérica menor e são mais conservadoras que as apresentadas no Teorema 2.1.

Teorema 2.2 *Se existem matrizes simétricas definidas positivas $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $F_j \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$ e*

$G_j \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$, $j = 1, \dots, N$, tais que (2.13) e

$$\tilde{M}_{jk} \triangleq \left[\begin{array}{c|c} R_{11} \otimes (P_j + P_k) + F_j(\mathbf{I}_d \otimes A_k) + (\mathbf{I}_d \otimes A'_k)F'_j & R_{12} \otimes (P_j + P_k) + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)G_k \\ + F_k(\mathbf{I}_d \otimes A_j) + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)F'_k & + (\mathbf{I}_d \otimes A'_k)G_j - F_j - F_k \\ \hline \star & R_{22} \otimes (P_j + P_k) \\ & - G_j - G'_j - G_k - G'_k \end{array} \right]$$

$$< \frac{2}{N-1} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_d \otimes \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad j = 1, \dots, N-1; k = j+1, \dots, N; \quad (2.26)$$

são verificadas, então \mathcal{A} é robustamente \mathcal{D} -estável e as condições do Lema 2.2 e do Teorema 2.1 são verificadas com $F(\alpha)$, $G(\alpha)$ e a matriz de Lyapunov dependente de parâmetro $P(\alpha)$ dadas em (2.12).

Prova: É similar à prova do Teorema 2.1. Note-se que, com $A(\alpha) \in \mathcal{A}$ e com as matrizes $F(\alpha)$, $G(\alpha)$ e $P(\alpha)$ dadas em (2.12), tem-se $P(\alpha) > \mathbf{0}$ e

$$\left[\begin{array}{c|c} R_{11} \otimes P(\alpha) & R_{12} \otimes P(\alpha) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')G(\alpha) - F(\alpha) \\ + F(\alpha)(\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')F(\alpha)' & \\ \hline \star & R_{22} \otimes P(\alpha) - (G(\alpha) + G(\alpha)') \end{array} \right] =$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2 M_j + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \alpha_j \alpha_k \tilde{M}_{jk} \quad (2.27)$$

Impondo-se (2.13) e (2.26) e considerando-se que $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \dots, N$, $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$, a equação (2.27) implica que

$$\left[\begin{array}{c|c} R_{11} \otimes P(\alpha) & R_{12} \otimes P(\alpha) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')G(\alpha) - F(\alpha) \\ + F(\alpha)(\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')F(\alpha)' & \\ \hline \star & R_{22} \otimes P(\alpha) - (G(\alpha) + G(\alpha)') \end{array} \right] <$$

$$- \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^2 - \frac{2}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \alpha_j \alpha_k \right) \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_d \otimes \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \leq \mathbf{0}, \quad (2.28)$$

pois a expressão dentro dos parênteses é sempre maior ou igual a zero:

$$\sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N (\alpha_j - \alpha_k)^2 = (N-1) \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 - 2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \alpha_j \alpha_k \geq 0 \quad (2.29)$$

Como no caso do Teorema 2.1, as condições do Teorema 2.2 contêm o caso de \mathcal{D} -estabilidade robusta proposto em [PABB00] e as condições propostas em [RP02]. Por outro lado, não é possível partir dessas condições para recuperar aquelas propostas em [RP01a] devido à diferença de grau em α_j no lado direito de (2.17) e (2.28). Por essa razão, as condições do Teorema 2.2 são apenas suficientes para a factibilidade das LMIs propostas no Teorema 2.1.

As condições dos Teoremas 2.1 e 2.2 contêm a \mathcal{D} -estabilidade quadrática. Esta última pode ser obtida das primeiras, fazendo $F_j = F$, $G_j = G$ e $P_j = P = P' > \mathbf{0}$, $j = 1, \dots, N$. Neste caso, apenas a condição (2.13) precisa ser verificada (as demais podem ser escritas como soma de termos dessa primeira). Este resultado é apresentado no corolário seguinte.

Corolário 2.1 *O politopo \mathcal{A} é quadraticamente \mathcal{D} -estável se e somente se qualquer uma das duas condições equivalentes seguintes for verificada*

i) *Existe uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que*

$$\begin{bmatrix} R_{11} \otimes P + R_{12} \otimes PA_j + R'_{12} \otimes A'_j P & L \otimes A'_j P \\ \star & -\mathbf{I}_d \otimes P \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.30)$$

com $R_{22} = LL'$.

ii) *Existe uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $G \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$ e $F \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$ tais que*

$$\left[\begin{array}{c|c} R_{11} \otimes P + F(\mathbf{I}_d \otimes A_j) + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)F' & R_{12} \otimes P + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)G - F \\ \star & R_{22} \otimes P - (G + G') \end{array} \right] < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (2.31)$$

Prova: Para $A(\alpha) \in \mathcal{A}$ e $P(\alpha) = P = P' > \mathbf{0}$, a equivalência entre as condições i) e ii) pode ser obtida por meio de (2.6) que, neste caso, é escrita como

$$R_{11} \otimes P + R_{12} \otimes PA(\alpha) + R'_{12} \otimes A(\alpha)'P + R_{22} \otimes A(\alpha)'PA(\alpha) < \mathbf{0} \quad (2.32)$$

Assim, multiplicando-se (2.30) por $\alpha_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$ e somando-se em j , $j = 1, \dots, N$, pode-se utilizar o fato de que $R_{22} \geq \mathbf{0}$ para fatorar $R_{22} = LL'$. Aplicando-se o complemento de Schur obtém-se (2.32). Note-se que os passos inversos podem ser seguidos para, partindo de (2.32), obter (2.30). A suficiência da condição ii) para (2.32) pode ser verificada, multiplicando-se (2.31) por α_j , $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$, somando-se em j , $j = 1, \dots, N$, pré-multiplicando-se a equação obtida por $\mathcal{T}(\alpha)$, dada em (2.9), e pós-multiplicando por $\mathcal{T}(\alpha)'$. A necessidade pode ser provada, assumindo-se que (2.32) é verificada com $P > \mathbf{0}$ e definindo-se

$$-Q_j = R_{11} \otimes P + R_{12} \otimes PA_j + R'_{12} \otimes A'_j P + R_{22} \otimes A'_j PA_j < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (2.33)$$

Fazendo-se

$$F = R_{12} \otimes P \quad \text{e} \quad G = R_{22} \otimes P + \varepsilon \mathbf{I}_{dn} \quad (2.34)$$

com $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ pequeno o suficiente para verificar-se que

$$R_{22} \otimes P + 2\varepsilon \mathbf{I}_{dn} > \varepsilon^2 (\mathbf{I} \otimes A'_j) Q_j^{-1} (\mathbf{I}_d \otimes A_j); \quad j = 1, \dots, N \quad (2.35)$$

então, é possível obter-se

$$-R_{22} \otimes P + (G + G') > (R_{12} \otimes P + G(\mathbf{I}_d \otimes A_j) - F') Q_j^{-1} (R'_{12} \otimes P + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)G' - F); \quad j = 1, \dots, N \quad (2.36)$$

que, aplicando-se o complemento de Schur, resulta em

$$\left[\begin{array}{c|c} -Q_j & (R'_{12} \otimes P + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)G' - F) \\ \star & R_{22} \otimes P - (G + G') \end{array} \right] < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (2.37)$$

Finalmente, note-se que, considerando-se (2.34), o lado esquerdo dessa última equação pode ser escrito como a soma do lado esquerdo de (2.31) e

$$\begin{bmatrix} R_{22} \otimes A'_j PA_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

que, por sua vez, é uma parcela semidefinida positiva, implicando que (2.31) é verificada para todo $j = 1, \dots, N$. ■

Sendo as duas condições do Corolário 2.1 necessárias e suficientes para a análise de \mathcal{D} -estabilidade quadrática, cabe ressaltar-se que a condição proposta em *i*) possui complexidade numérica menor que a da condição *ii*). Em contrapartida, no caso de síntese de controladores (não apresentado aqui, veja-se [dOBG99] e [PABB00] para detalhes) a segunda condição apresenta vantagens sobre a primeira.

2.4 Análise das condições LMI

Inicialmente é feita uma análise da complexidade numérica associada às condições apresentadas na Seção 2.3 e de algumas condições do tipo LMI encontradas na literatura. Em seguida, resultados numéricos que buscam avaliar a abrangência de cada uma dessas condições são apresentados.

2.4.1 Complexidade numérica

As condições suficientes aqui apresentadas para a \mathcal{D} -estabilidade robusta de um politopo de matrizes, ou seja, as condições propostas nos Teoremas 2.1 (EC₁) e 2.2 (EC₂) e no Corolário 2.1 *i*) (EQ₁) e *ii*) (EQ₂), expressam-se todas por meio de testes de factibilidade de um conjunto de LMIs. Hoje em dia, há algoritmos eficientes baseados em métodos de pontos interiores, de complexidade polinomial, para a resolução desses problemas. A complexidade de problemas formulados em termos de LMIs está associada ao número \mathcal{K} de variáveis escalares e também com o número \mathcal{L} de linhas do sistema de equações (LMIs). O número de operações em ponto flutuante ou o tempo necessário para se resolver um problema, utilizando-se métodos de pontos interiores do LMI Control Toolbox do Matlab [GNLC95], é proporcional a $\mathcal{K}^3\mathcal{L}$. Outros programas podem apresentar desempenho diferente. Veja-se também [BEFB94] para comentários sobre métodos de resolução de LMIs.

A Tabela 2.1 mostra os valores de \mathcal{K} e \mathcal{L} para cada um dos testes apresentados — EC₁, EC₂, EQ₁ e EQ₂ — sendo n o número de estados do sistema, N o número de vértices do politopo e d a ordem da região considerada. Ainda nessa tabela, as complexidades associadas aos testes de estabilidade propostos em [RP01a] (caso discreto no tempo, ER₁), [RP02] (caso contínuo no tempo, ER₂) e [PABB00] (EE) são mostradas. Sempre que pertinente, as expressões para \mathcal{K} e \mathcal{L} especializadas para os casos contínuo e discreto no tempo são também apresentadas.

As condições EQ₁ e EQ₂ apresentam complexidades menores que todos os demais critérios, porém os resultados produzidos são mais conservadores. Uma comparação mais detalhada da complexidade dos métodos EE, ER₁ e ER₂, ambos menos conservadores que EQ₁ e EQ₂ e baseados em funções de Lyapunov dependentes de parâmetro, é mostrada na Figura 2.1, para o caso discreto no tempo, e na Figura 2.2, para o caso contínuo no tempo.

No caso discreto no tempo, a complexidade do critério ER₁ é menor que a do EE para $N \leq 5$ e maior para $N > 6$, independentemente de n . Para $N = 8$ e $n \geq 3$, a complexidade associada a ER₁ é cerca de duas vezes maior que a do critério EE (veja-se a Figura 2.1.(a)). Na Figura 2.1.(b), é mostrada a complexidade relativa ER₁/EE em função do número de vértices. Pode-se observar que a influência de N^3 no critério ER₁ torna-se rapidamente o fator preponderante desse quociente.

Como no caso discreto no tempo, a Figura 2.2.(a) mostra a complexidade relativa ER₂/EE em função do número de estados n para vários valores de N . Pode-se notar que a complexidade do critério ER

Critério		\mathcal{K} (nº de variáveis)	\mathcal{L} (nº de linhas)
EC ₁	Região \mathcal{D}	$\frac{Nn}{2} (1 + (4d^2 + 1)n)$	$\frac{Nn}{3} (d(N^2 + 3N + 2) + 3)$
	\mathcal{R}_C ou \mathcal{R}_D	$\frac{Nn}{2} (5n + 1)$	$\frac{Nn}{3} (N^2 + 3N + 5)$
EC ₂	Região \mathcal{D}	$\frac{Nn}{2} (1 + (4d^2 + 1)n)$	$Nn (1 + d(N + 1))$
	\mathcal{R}_C ou \mathcal{R}_D	$\frac{Nn}{2} (5n + 1)$	$Nn (N + 2)$
EQ ₁	Região \mathcal{D}	$\frac{n}{2} (n + 1)$	$2dNn$
	\mathcal{R}_C ou \mathcal{R}_D	$\frac{n}{2} (n + 1)$	$2Nn$
EQ ₂	Região \mathcal{D}	$\frac{n}{2} (1 + (1 + 4d^2)n)$	$(2dN + 1)n$
	\mathcal{R}_C ou \mathcal{R}_D	$\frac{n}{2} (5n + 1)$	$(2N + 1)n$
EE	Região \mathcal{D}	$\frac{n}{2} (N + (N + 4d^2)n)$	$Nn (2d + 1)$
	\mathcal{R}_C ou \mathcal{R}_D	$\frac{n}{2} (N + (N + 4)n)$	$3Nn$
ER ₁	\mathcal{R}_D	$\frac{Nn}{2} (n + 1)$	$\frac{Nn}{6} (N^2 + 3N + 8)$
ER ₂	\mathcal{R}_C	$\frac{Nn}{2} (n + 1)$	$\frac{Nn}{2} (N + 3)$

Tabela 2.1: Número de variáveis escalares (\mathcal{K}) e número de linhas LMI (\mathcal{L}) em função do número de estados (n), vértices (N) e ordem da região (d), quando pertinente, para as condições propostas nos Teoremas 2.1 (EC₁) e 2.2 (EC₂), no Corolário 2.1 *i*) (EQ₁) e *ii*) (EQ₂), em [PABB00] (EE), em [RP01a] (ER₁) para o caso discreto no tempo e em [RP02] (ER₂) para o caso contínuo no tempo.

torna-se maior que a do EE para $N > 11$. Na Figura 2.2.(b), é mostrada a complexidade relativa ER₂/EE em função do número de vértices. Pode-se observar que a influência de N^2 no critério ER torna-se o fator preponderante para valores grandes de N ($N > 20$), independentemente do número de estados n .

Obviamente, os critérios EC₁ e EC₂ são os de maior complexidade, pois possuem mais variáveis escalares e mais linhas de LMIs do que os demais. Porém, esses critérios continuam sendo resolvidos em tempo polinomial por algoritmos especializados de pontos interiores. O critério EC₁ possui complexidade maior que EC₂, pois este último utiliza uma majoração baseada em uma função de grau dois em α_j , equação (2.28), enquanto o primeiro utiliza uma majoração de grau três, equação (2.17). Uma comparação de complexidade entre os critérios EC₁ e EC₂ mostra que a relação de complexidade (assumindo proporcionalidade a $\mathcal{K}^3\mathcal{L}$) é dada por

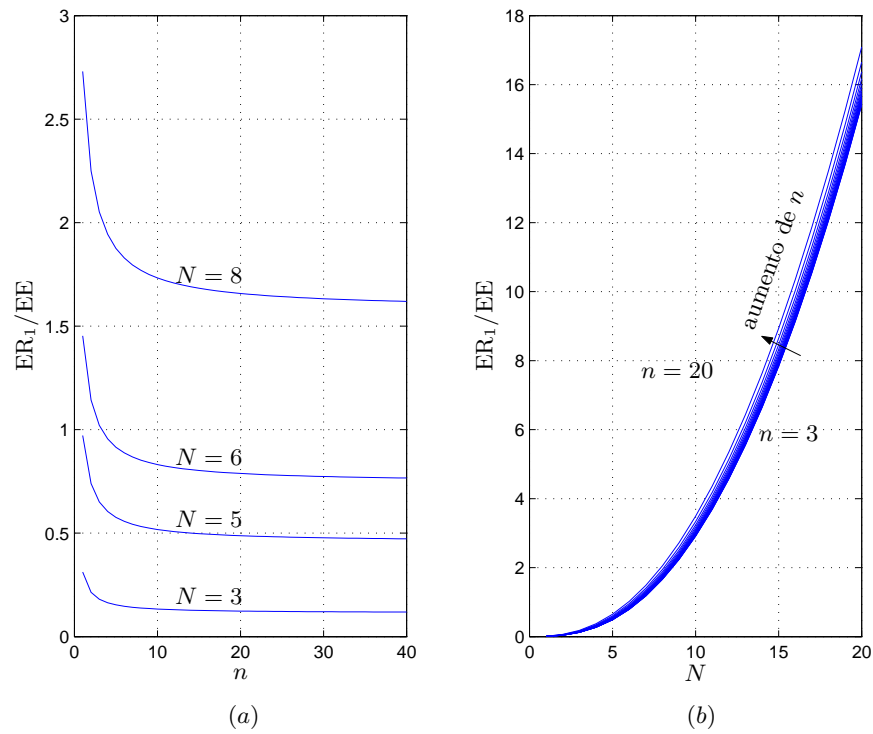


Figura 2.1: Complexidade numérica relativa (a) ER_1/EE em função do número de estados n e (b) ER_1/EE em função do número de vértices N (caso discreto).

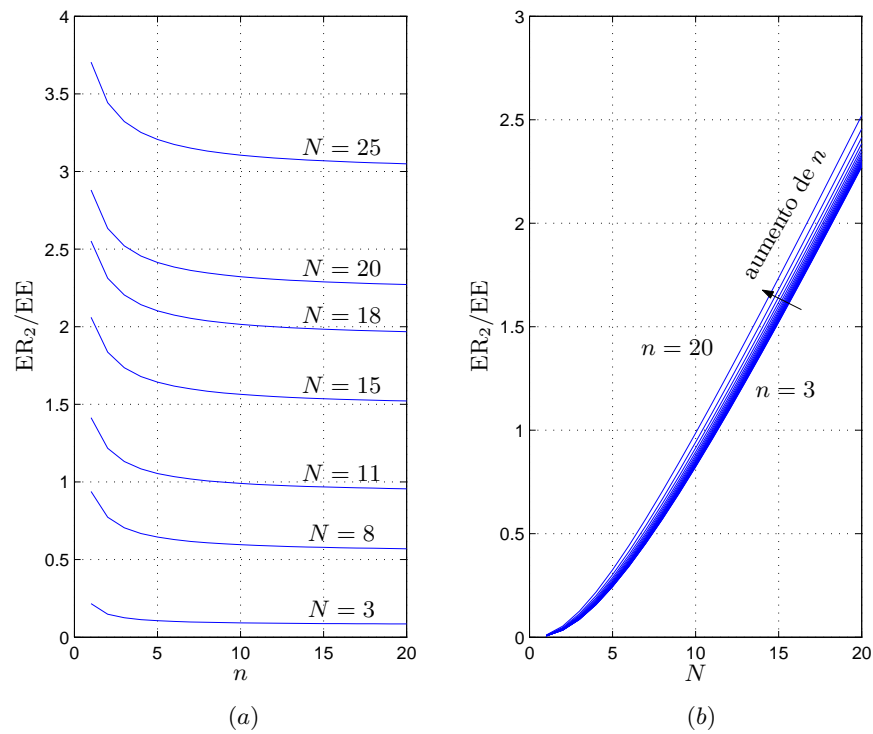


Figura 2.2: Complexidade numérica relativa (a) ER_2/EE em função do número de estados n e (b) ER_2/EE em função do número de vértices N (caso contínuo).

$$\kappa^3 \mathcal{L} \left(\frac{EC_1}{EC_2} \right) = \frac{N^2 + 3N + 5}{3(N + 2)} \cong 0.3265N + 0.5118. \quad (2.38)$$

Essa avaliação mostra que o aumento no grau da função em α_j de dois para três resulta em um acréscimo relativo de complexidade numérica que varia linearmente com o número de vértices do politopo, N , e independe do número de estados, n . Usando-se (2.38) percebe-se que a complexidade numérica de EC_1 dobra em relação à de EC_2 , quando o número de vértices N passa de 4 para 5.

Tempo computacional

Foram realizados alguns experimentos numéricos (veja-se a Seção 2.4.2, na sequência), os quais fornecem uma estimativa do tempo computacional necessário para que cada uma das condições LMI consideradas obtenha uma solução factível. As condições dos Teoremas 2.1 e 2.2 foram consideradas em suas versões especializadas, isto é, com M_j , M_{jk} e M_{jkl} dadas por (2.20)-(2.22), para o caso contínuo no tempo, e por (2.23)-(2.25), para o caso discreto no tempo.

Como esperado, a complexidade numérica associada à condição LMI menos conservadora, Teorema 2.1, é a maior de todas as condições, porém não é proibitiva, especialmente para os sistemas avaliados neste capítulo. O tempo médio para cada teste com $n = 2$ e $N = 2$ permanece abaixo de 20 ms para todos os métodos (para ambos os casos: contínuo e discreto no tempo). Para sistemas com $n = 5$ e $N = 5$, os tempos computacionais encontrados para o caso contínuo no tempo foram de 40 ms (EQ_1), 70 ms (EE), 24 ms (ER_2), 101 s (EC_1) e 37 s (EC_2) (para sistemas discretos no tempo, 40 ms, 75 ms, 1.9 s, 101 s e 37 s, respectivamente). Os testes foram feitos em um computador com processador *AMD K7 Athlon* 1.4 GHz, com 256 Mbytes de *RAM*, usando *Matlab* e o *LMI Control Toolbox* [GNLC95]. Veja-se ainda [dOOL⁺02b] para uma comparação numérica envolvendo apenas os critérios EQ_1 , EE, ER_1 e ER_2 .

2.4.2 Abrangência das condições LMI

Inicialmente, é feita uma comparação entre os critérios, especializados para o caso discreto no tempo e para o caso contínuo no tempo, de \mathcal{D} -estabilidade robusta apresentados no Teorema 2.1 (EC_1) de \mathcal{D} -estabilidade quadrática (EQ) apresentados no Corolário 2.1 (equação (2.30)), de \mathcal{D} -estabilidade estendida (EE), proposta em [PABB00], e as condições de estabilidade robusta de sistemas discretos no tempo (ER_1) e de sistemas contínuos no tempo (ER_2), apresentadas em [RP01a] e [RP02], respectivamente. A condição EC_1 corresponde ao Teorema 2.1 com M_j , M_{jk} e M_{jkl} , dados em (2.23)-(2.25). Em seguida, é feita uma comparação numérica da abrangência das condições dos Teoremas 2.1 e 2.2.

Para investigar a abrangência de cada uma das condições, foram gerados de maneira aleatória 1000 politopos estáveis para cada par (n, N) com $2 \leq n \leq 5$ e $2 \leq N \leq 5$. O número 1000 foi escolhido por ter sido verificado que os percentuais de sucesso de cada método não sofrem alterações significativas quando números maiores de politopos são investigados.

Caso discreto no tempo

A geração dos politopos estáveis foi realizada, adotando-se a seguinte estratégia: (i) geração de N matrizes de dimensões $n \times n$, cujos elementos são valores reais uniformemente distribuídos no intervalo $[-1, 1]$; (ii) determinação, para cada vértice, do maior autovalor em módulo σ ; (iii) divisão de cada matriz

vértice pelo respectivo $\sigma/0.95$, de maneira a garantir que, inicialmente, cada vértice possua pelo menos um autovalor com módulo igual a 0.95; (iv) determinação do maior dos valores absolutos de todos os autovalores do politopo gerado, σ_{max} , por meio de uma malha fina; (v) divisão de cada uma das matrizes vértices do politopo por $(\sigma_{max}/0.99)$, garantindo-se que a nuvem de autovalores possui pelo menos um elemento com módulo igual a 0.99. No total, foram gerados 16000 politopos estáveis, e o resultado dos testes de estabilidade está apresentado na Tabela 2.2.

n	N	EQ ₁	EE	ER ₁	EC ₁	n	N	EQ ₁	EE	ER ₁	EC ₁
2	2	326	996	881	996	3	2	186	962	869	962
	3	55	890	761	989		3	5	751	714	920
	4	10	789	646	984		4	1	524	578	855
	5	1	692	545	979		5	0	427	508	862
4	2	110	956	873	956	5	2	79	963	880	963
	3	4	716	705	895		3	0	748	747	918
	4	1	460	605	857		4	0	400	584	847
	5	0	288	506	838		5	0	220	468	813

Tabela 2.2: Número de politopos estáveis identificados pelos testes EQ (estabilidade quadrática), EE ([PABB00]), ER₁ ([RP01a]) e EC₁ (Teorema 2.1), quando aplicados a 1000 politopos estáveis para cada par $2 \leq n \leq 5$, $2 \leq N \leq 5$. Condições especializadas para sistemas discretos no tempo.

O critério quadrático mostra resultados bem mais conservadores, praticamente só identificando politopos estáveis para $N = 2$ e $N = 3$ vértices, e mesmo assim com um percentual bastante baixo. Note-se que os politopos estáveis gerados sempre estão no limite da estabilidade, com autovalores muito próximos do círculo unitário. Uma visualização dos resultados da Tabela 2.2 é dada na Figura 2.3, na qual são mostrados quatro gráficos na forma de barras comparando o número de politopos estáveis identificados por cada método. Os eixos das abscissas referem-se ao número de estados do politopo, cada qual com um grupo de quatro barras verticais que representam o número de politopos identificados como estáveis. A barra mais à esquerda corresponde a $N = 2$, e a mais à direita a $N = 5$.

Na comparação entre as condições independentes EE e ER₁, nota-se uma ligeira vantagem para EE nos problemas de baixa complexidade e um desempenho melhor de ER₁, quando n e N aumentam. Os percentuais relativos entre o número de acertos de ER₁ e o número de acertos de EE em relação ao que obteve menor índice absoluto são mostrados na Figura 2.4. Esses percentuais são apresentados em função do aumento da complexidade dos casos, n crescendo de 2 a 5 nas abscissas e, para cada valor de n , o número de vértices N variando de 2 a 5, da esquerda para a direita. Valores positivos indicam que ER₁ identificou mais politopos estáveis do que EE. É importante salientar, entretanto, que EE e ER₁ são condições apenas suficientes, e que não estão contidas uma na outra, mas ambas estão contidas em EC₁. Veja-se [dOOL⁺02a] para mais detalhes da comparação entre EQ, EE e ER₁.

A comparação relativa do método EC₁ com a melhor dentre as duas condições EE e ER₁ é mostrada na Figura 2.5, deixando patente a superioridade do resultado do Teorema 2.1.

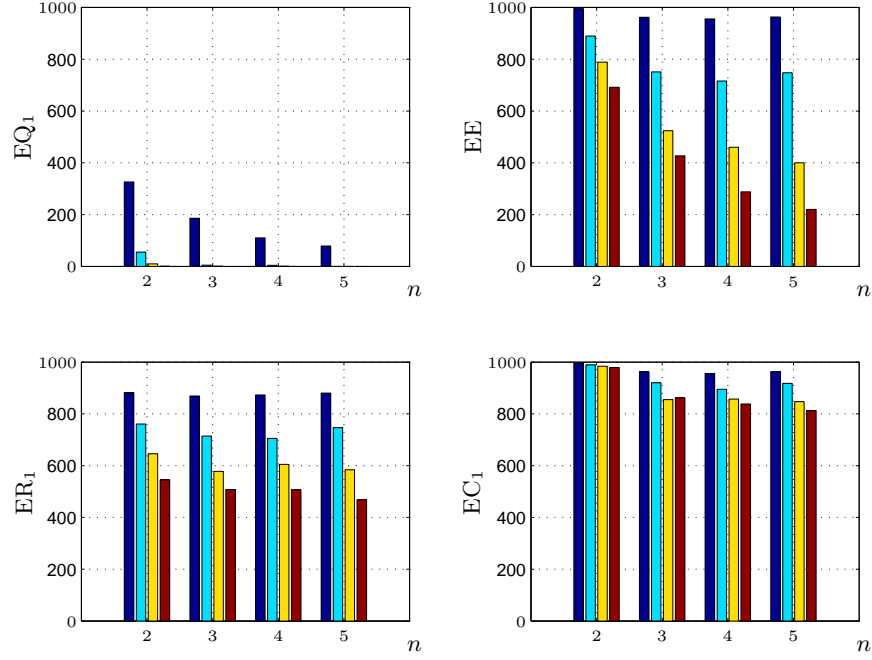


Figura 2.3: Número de politopos estáveis identificados pelos critérios EQ_1 , EE , ER_1 e EC_1 , para $2 \leq n \leq 5$ (abscissas) e $2 \leq N \leq 5$ (barras verticais, $N = 2$ à esquerda). Condições especializadas para sistemas discretos no tempo.

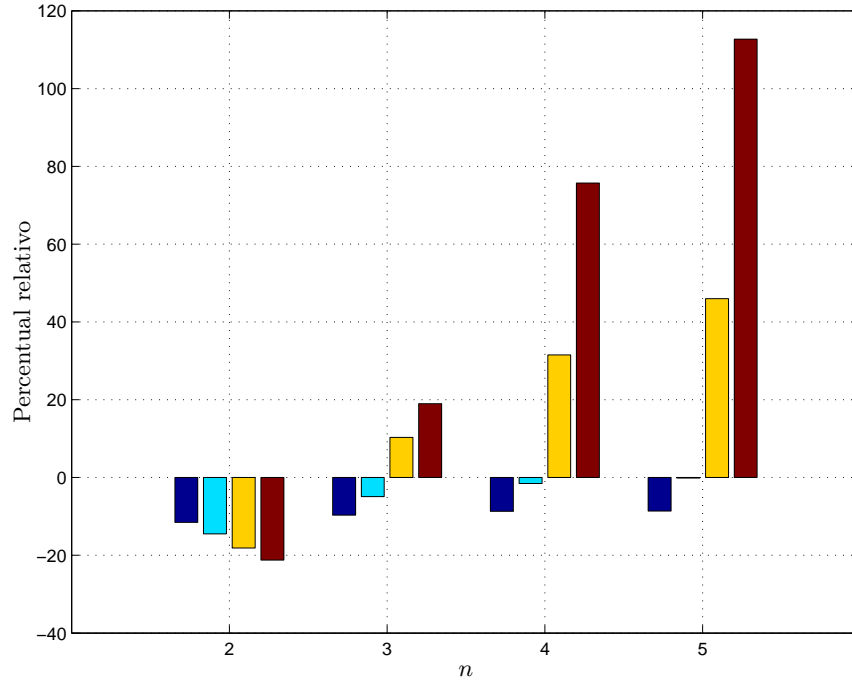


Figura 2.4: Percentual relativo de acertos ER_1/EE em função do aumento do número de estados n para grupos de exemplos com número de vértices N variando de 2 a 5, da esquerda para a direita. Caso discreto no tempo.

Caso contínuo no tempo

Assim como no caso discreto no tempo, foi feita uma comparação entre os métodos apresentados para identificação de sistemas incertos contínuos no tempo. Para isso, foram também gerados 1000 politopos

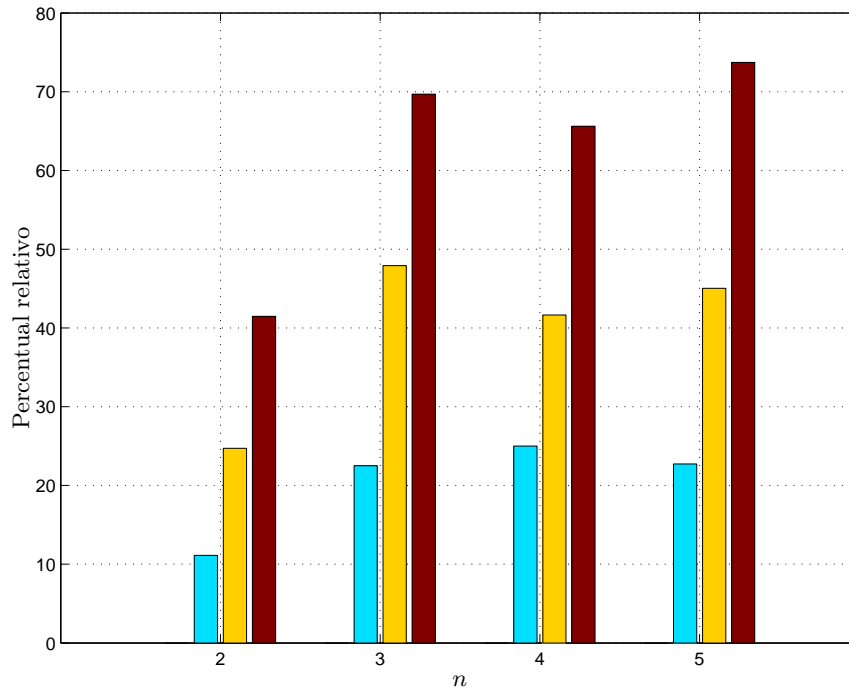


Figura 2.5: Percentual relativo de acertos $EC_1/(\text{melhor entre EE e } ER_1)$ em função do aumento do número de estados n para grupos de exemplos com número de vértices N variando de 2 a 5, da esquerda para a direita, caso discreto no tempo. Não houve ganho para $N = 2$, $n = 2, 3, 4, 5$.

estáveis para cada par (n, N) com $2 \leq n \leq 5$ e $2 \leq N \leq 5$.

A geração dos polítopos estáveis foi realizada, adotando-se os seguintes passos: (i) geração de N matrizes de dimensões $n \times n$ cujos elementos são valores reais uniformemente distribuídos no intervalo $[-1, 1]$; (ii) para cada vértice, determinação da maior parte real dos autovalores, σ , e subtração de $(\sigma + 1 \times 10^{-4})\mathbf{I}_n$, garantindo pelo menos um autovalor de cada vértice com parte real em -1×10^{-4} ; (iii) determinação da maior das partes reais de todos os autovalores do polítopo gerado, σ_{max} , por meio de uma malha fina; (iv) subtração de $(\sigma_{max} + 1 \times 10^{-4})\mathbf{I}_n$ de cada uma das matrizes vértices do polítopo. No total, foram gerados 16000 polítopos estáveis, e o resultado dos testes de estabilidade está apresentado na Tabela 2.3.

n	N	EQ ₁	EE	ER ₂	EC ₁	n	N	EQ ₁	EE	ER ₂	EC ₁
2	2	642	1000	1000	1000	3	2	346	959	925	959
	3	378	948	1000	1000		3	133	681	860	927
	4	361	711	993	998		4	106	461	834	918
	5	361	719	997	1000		5	93	360	860	920
4	2	229	969	915	969	5	2	226	973	928	973
	3	65	611	848	931		3	28	573	857	941
	4	32	318	816	907		4	22	257	787	908
	5	42	255	814	903		5	14	169	768	904

Tabela 2.3: Número de polítopos estáveis identificados pelos testes EQ (estabilidade quadrática), EE ([PABB00]), ER₂ ([RP02]) e EC₁ (Teorema 2.1) quando aplicados a 1000 polítopos estáveis para $2 \leq n \leq 5$, $2 \leq N \leq 5$. Condições especializadas para sistemas contínuos no tempo.

O critério quadrático mostra resultados mais conservadores, e essa tendência acentua-se com o aumento no número de vértices, independentemente do número de estados. O teste de estabilidade robusta proposto no Teorema 2.1 (EC₁) apresenta os melhores resultados, com avaliações positivas sempre que EE ou ER₂ fornecem solução factível e, em inúmeras situações (principalmente quando a complexidade aumenta), é a única condição que identifica a estabilidade dos politopos.

Comparando-se as condições EE e ER₂, pode-se dizer que, em termos gerais, o critério ER₂ é o menos conservador, apresentando, no entanto, resultados similares e até um pouco piores que os do critério EE para valores pequenos de N e n (veja também [LMRP02] para uma comparação apenas entre EQ₁, EE e ER₂). Note-se que as condições EE e ER₂ contêm EQ₁, mas não estão contidas uma na outra (são condições suficientes independentes). A Figura 2.6 mostra a evolução dos percentuais da diferença entre o número de acertos de ER₂ e o número de acertos de EE em relação ao método que obteve menor índice absoluto. Esses percentuais são apresentados em função do aumento da complexidade dos casos, n crescendo de 2 a 5 nas abscissas e, para cada valor de n , o número de vértices N variando de 2 a 5, da esquerda para a direita.

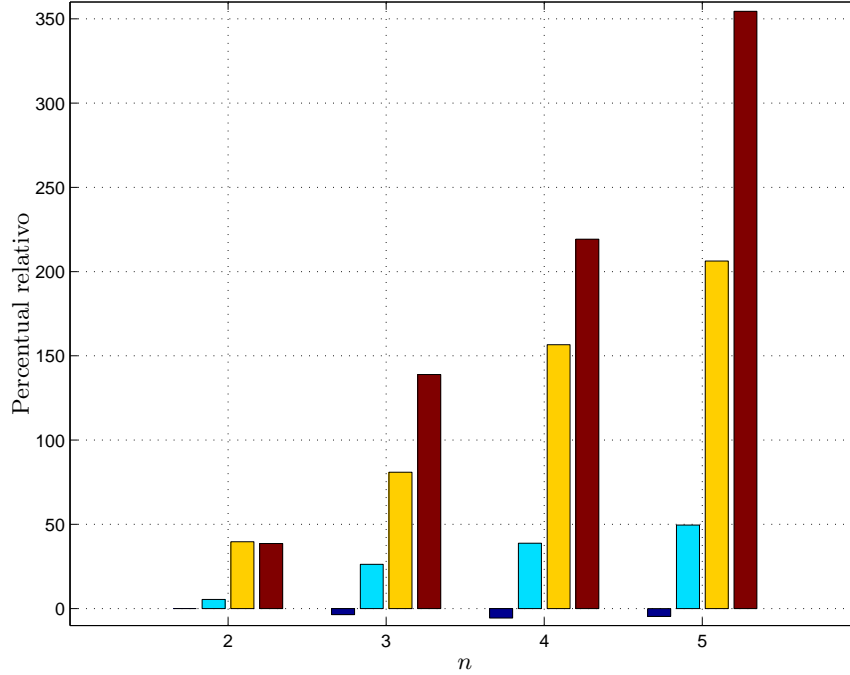


Figura 2.6: Percentual relativo de acertos ER₂/EE em função do aumento do número de estados n para grupos de exemplos com número de vértices N variando de 2 a 5, da esquerda para a direita. Caso contínuo no tempo.

Uma visualização dos resultados da Tabela 2.3 é dada na Figura 2.7, na qual são mostrados quatro gráficos na forma de barras comparando o número de politopos estáveis identificados por cada método. Os eixos das abscissas referem-se ao número de estados do politopo, cada qual com um grupo de quatro barras verticais que representam o número de politopos identificados como estáveis. A barra mais à esquerda corresponde a $N = 2$, e a mais à direita, a $N = 5$.

Como feito para o caso discreto no tempo, foi realizada a comparação relativa entre EC e a melhor dentre as condições EE e ER₂, proporcionando assim uma idéia melhor da superioridade do método do

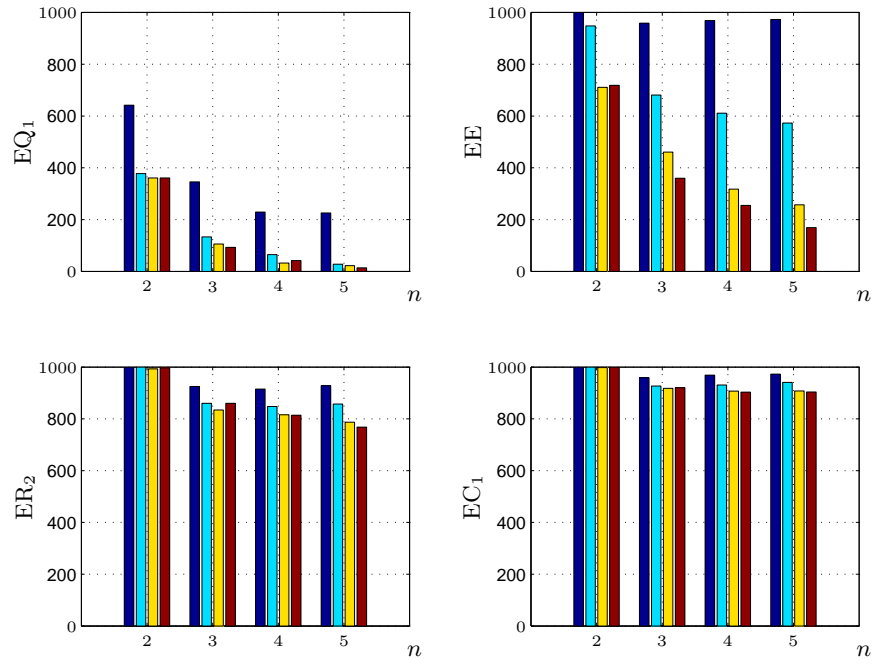


Figura 2.7: Número de politopos estáveis identificados pelos critérios EQ, EE, ER e EC, para $2 \leq n \leq 5$ (abscissas) e $2 \leq N \leq 5$ (barras verticais, $N = 2$ à esquerda). Condições especializadas para sistemas contínuos no tempo.

Teorema 2.1 (EC₁) em relação aos demais. O resultado está mostrado na Figura 2.8.

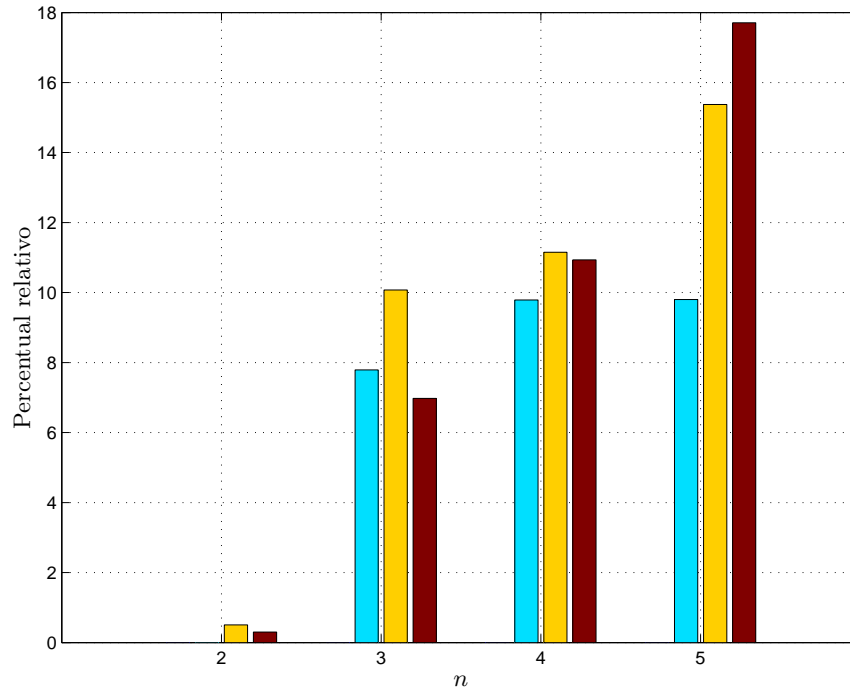


Figura 2.8: Percentual relativo de acertos EC/(melhor entre EE e ER) em função do aumento do número de estados n para grupos de exemplos com número de vértices N variando de 3 a 5, da esquerda para a direita, caso contínuo. Não houve ganho para $N = 2$, $n = 2, 3, 4, 5$ nem tampouco para $N = 3$, $n = 2$.

Observação 2.1 Nos testes realizados nesta seção, foi sempre utilizada a condição EC_1 em detrimento de EC_2 por fornecer resultados sempre menos conservadores. Entretanto, alguns testes numéricos realizados — não apresentados neste trabalho — sugerem que o desempenho da condição EC_2 seja próximo do alcançado pela EC_1 . Porém, como mostrado na seção seguinte, não é difícil encontrar exemplos nos quais a condição EC_2 falha e, contudo, a condição EC_1 encontra uma solução factível.

Observação 2.2 As condições formuladas neste capítulo supõem que o politopo \mathcal{A} é definido por matrizes reais. Entretanto, se as matrizes em \mathcal{A} são complexas, isto é $A_j \in \mathbb{C}^{n \times n}$, as condições podem ser utilizadas se a busca de matrizes $P(\alpha)$, $F(\alpha)$ e $G(\alpha)$ for feita no campo das matrizes complexas. Neste caso, as matrizes $P_j \in \mathbb{C}^{n \times n}$ serão hermitianas definidas positivas, isto é, $P_j^* = P_j > \mathbf{0}$, e a região $\mathcal{R} \in \mathbb{C}^{2d \times 2d}$ é definida por submatrizes complexas.

2.5 Exemplos

Nesta seção, vários exemplos gerados aleatoriamente são apresentados para ilustrar o uso das condições propostas neste capítulo. Inicialmente, para demonstrar o menor conservadorismo da condição proposta no Teorema 2.1 em relação à proposta no Teorema 2.2, são apresentados dois exemplos, um para o caso discreto no tempo e outro para o caso contínuo no tempo. É importante ressaltar que os casos nos quais apenas a condição EC_1 é factível (e EC_2 não) são mais facilmente encontrados à medida que a complexidade do problema aumenta (isto é, com o aumento de n e N no sistema incerto). Para todos os exemplos são mostradas as nuvens de autovalores dos sistemas incertos considerados. Essas nuvens foram obtidas da seguinte forma: em cada caso, os vértices foram tomados dois-a-dois e, por meio de uma malha fina, foi varrida a combinação convexa de cada par de vértices, calculando para cada ponto dessa malha fina os autovalores do sistema determinado. Em seguida, foram feitas 5000 combinações convexas aleatórias entre todos os vértices, calculando, em cada situação, os autovalores do sistema resultante. Finalmente, os autovalores determinados são colocados no plano complexo.

Exemplo 2.1 Considere-se o sistema incerto contínuo no tempo, com $n = 2$ estados e que pertence ao politopo definido pelos $N = 4$ vértices

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.680 & 0.590 \\ 0.660 & 0.630 \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.900 & -0.200 \\ -0.320 & -0.890 \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.550 & 0.870 \\ -0.310 & 1.080 \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1.300 & -1.260 \\ 2.040 & -1.310 \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Com relação ao semi-plano esquerdo, esse sistema é robustamente estável, conforme pode ser observado na Figura 2.9.

Nessa figura, é mostrada a nuvem de autovalores do politopo definido por (2.39)-(2.42). Apenas a condição proposta no Teorema 2.1 é capaz de identificar esse sistema como robustamente \mathcal{D} -estável. Todas as demais condições, incluindo EC_2 , falham.

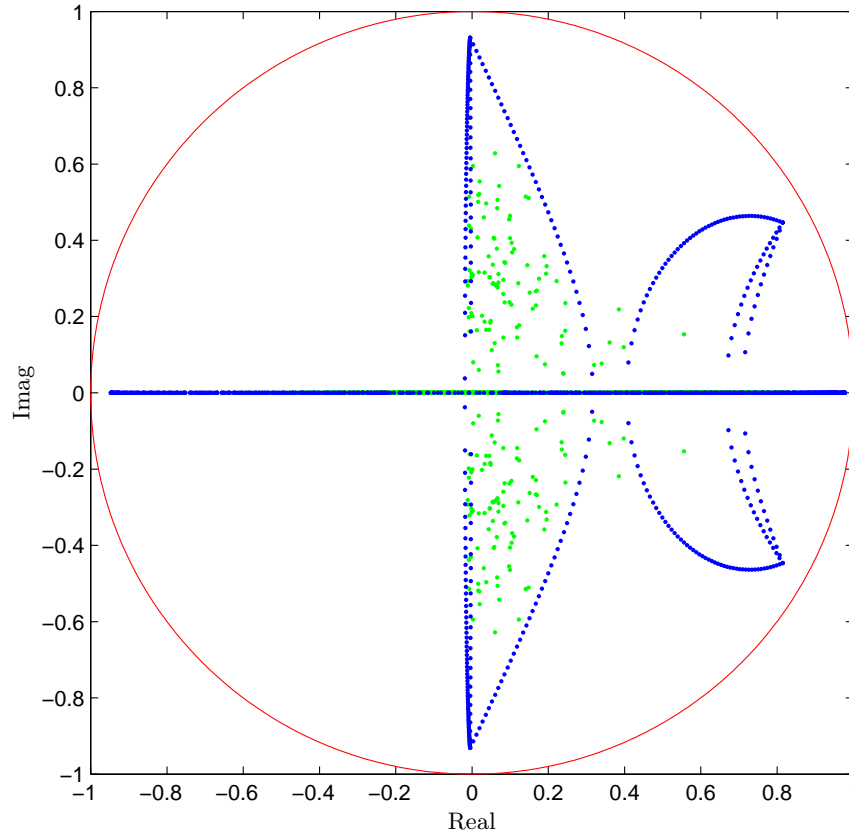


Figura 2.9: Nuvem de autovalores do sistema incerto discreto no tempo dado pelos vértices (2.39)-(2.42), identificado como estável apenas pela condição EC_1 .

Exemplo 2.2 Considere-se o sistema incerto discreto no tempo com $n = 5$ estados, pertencente ao politopo definido pelos $N = 3$ vértices

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.220 & 0.310 & 0.770 & 0.720 & 0.220 \\ 0.070 & 0.060 & -0.560 & -0.310 & -0.730 \\ -0.870 & 0.210 & 0.800 & 0.550 & 0.280 \\ -0.400 & 0.790 & 0.410 & -0.160 & -0.350 \\ -0.270 & 0.080 & 0.200 & -0.510 & -0.790 \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.770 & 0.050 & 0.400 & 0.300 & 0.230 \\ 0.250 & 0.290 & -0.650 & 0.720 & 0.720 \\ -0.150 & -0.450 & -0.100 & -0.700 & 0.800 \\ 0.480 & -0.660 & 0.650 & 0.120 & -0.650 \\ 0.280 & -0.440 & -0.100 & 0.810 & -0.350 \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.390 & -0.650 & -0.580 & 0.240 & -0.160 \\ -0.220 & 0.520 & -0.070 & -0.340 & -0.520 \\ 0.030 & 0.470 & -0.280 & -0.610 & -0.170 \\ -0.540 & 0.700 & -0.570 & -0.640 & -0.280 \\ 0.030 & 0.640 & 0.210 & 0.320 & 0.310 \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

cujas nuvens de autovalores é apresentada na Figura 2.10.

Esse sistema é identificado como robustamente \mathcal{D} -estável (em relação ao círculo unitário centrado na

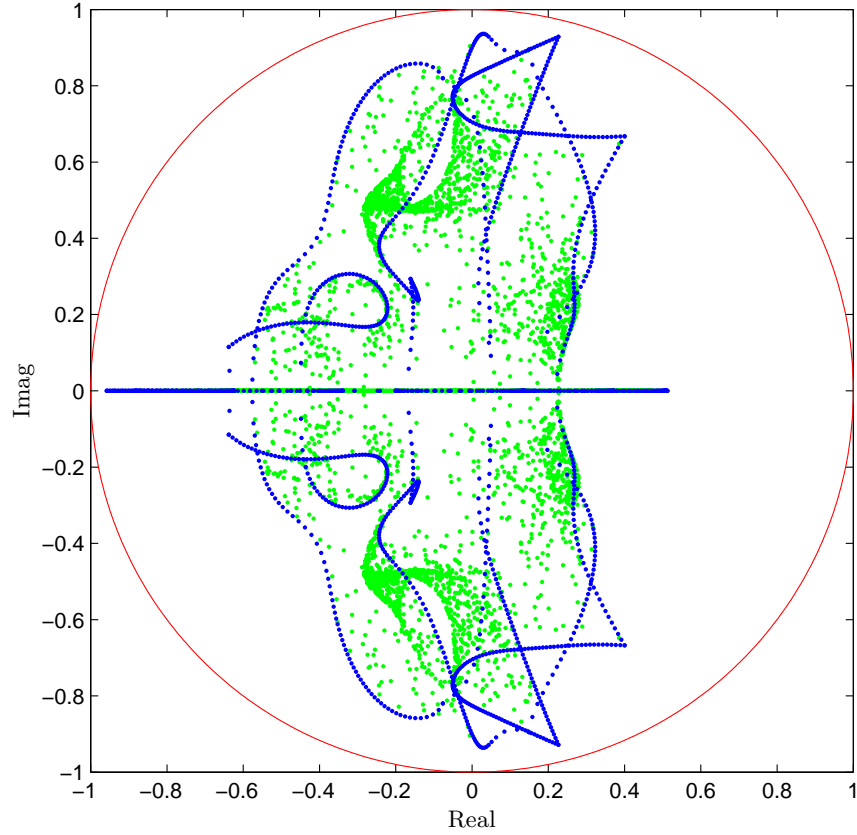


Figura 2.10: Nuvem de autovalores do sistema discreto dado por (2.43)-(2.45), identificado como estável apenas pela condição EC_1 .

origem do plano complexo) somente pela condição EC_1 . Todas as demais condições, incluindo EC_2 , não obtêm soluções factíveis neste caso.

Na sequência, são apresentados outros exemplos nos quais tanto a condição EC_1 quanto a EC_2 fornecem soluções factíveis. Esses exemplos foram avaliados pelas outras condições de \mathcal{D} -estabilidade discutidas neste capítulo — EE , ER_1 , ER_2 e EQ_1 —, evidenciando o grau de conservadorismo associado a cada uma delas. Os três exemplos seguintes referem-se a sistemas incertos discretos no tempo e, portanto, a região de \mathcal{D} -estabilidade considerada corresponde ao círculo unitário centrado na origem do plano complexo, conforme definido por \mathcal{R}_D na equação (2.5).

Exemplo 2.3 O sistema incerto discreto no tempo dado pelos vértices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.978 & -1.018 \\ 0.115 & 0.639 \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.209 & 1.002 \\ -0.92 & -0.855 \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.051 & -0.56 \\ 1.223 & 1.111 \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

define um politopo robustamente estável, conforme pode ser observado na Figura 2.11. Apenas as con-

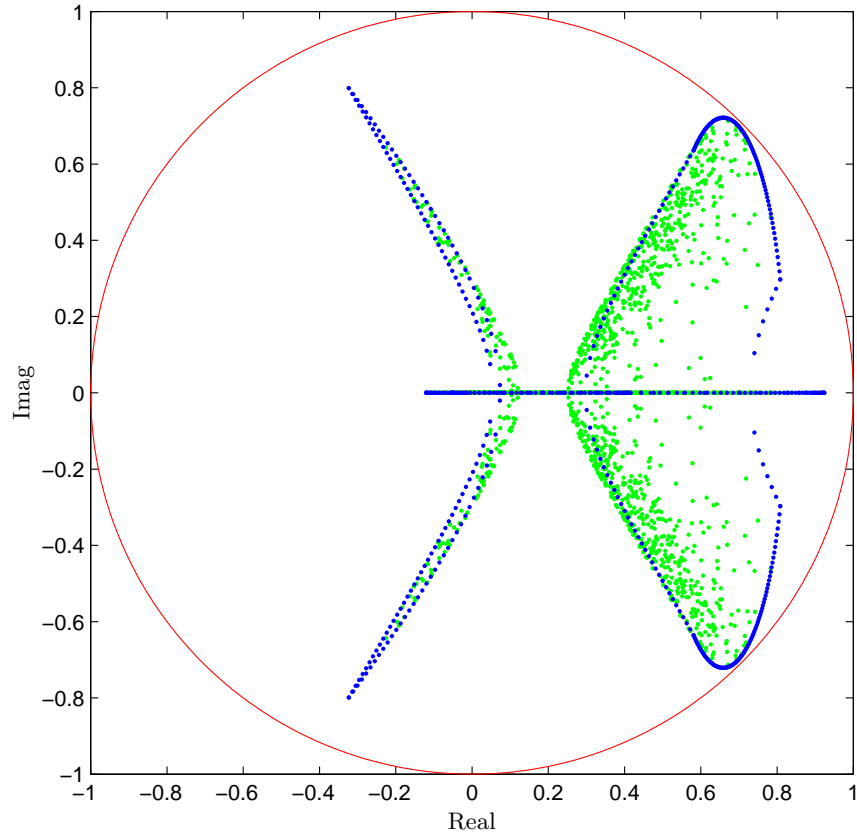


Figura 2.11: Nuvem de autovalores do sistema incerto discreto no tempo dado pelos vértices (2.46)-(2.48), identificado como estável apenas pelas condições EC_1 e EC_2 .

dições do Teorema 2.1 (e as do Teorema 2.2) proporcionam uma avaliação positiva (todas as demais falham).

Exemplo 2.4 Lembrando-se que EE e ER_1 são condições independentes, e que, portanto, uma pode identificar um polítopo como estável e a outra não ou vice-versa, foi gerado aleatoriamente um exemplo simples para o qual EE falha, mas ER_1 e EC_1 (e EC_2) são verificadas. Os vértices do polítopo são dados por

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.800 & -0.200 \\ 1.200 & 1.100 \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.900 & -0.600 \\ 0.000 & 0.300 \end{bmatrix}, \quad (2.50)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.500 & -0.200 \\ 0.900 & -1.300 \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

cujas nuvens de autovalores estão representadas na Figura 2.12.

Exemplo 2.5 Considere-se o sistema discreto no tempo cuja matriz dinâmica $A(\alpha)$ pertence ao polítopo descrito pelos vértices

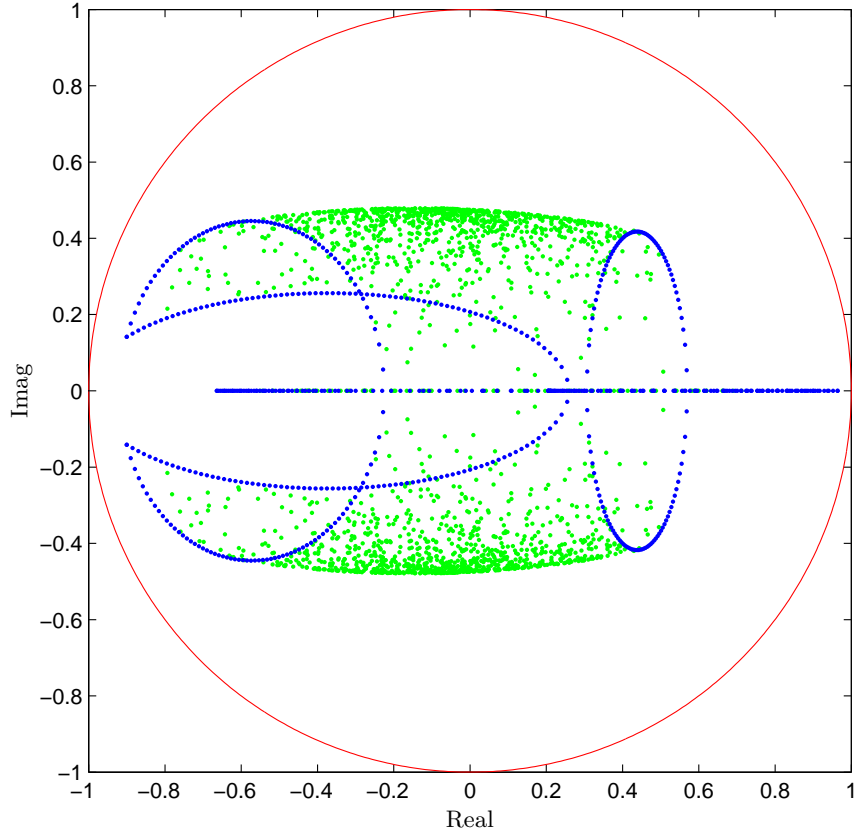


Figura 2.12: Nuvem de autovalores associada ao sistema discreto dado por (2.49)-(2.51), identificado como estável apenas pelas condições ER_1 e EC_1 (e EC_2).

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.143 & 0.656 & -0.590 \\ -0.813 & 0.216 & -0.015 \\ 0.649 & -0.681 & -0.418 \end{bmatrix}, \quad (2.52)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.303 & 0.636 & -0.147 \\ -0.617 & -0.041 & 0.978 \\ -0.244 & -1.120 & -0.537 \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.495 & 0.438 & 0.895 \\ -0.188 & -1.113 & -0.295 \\ 0.559 & 0.275 & 0.041 \end{bmatrix}, \quad (2.54)$$

Embora esse seja um sistema estável (veja a nuvem de autovalores mostrada na Figura (2.13)), somente as condições dos Teoremas 2.1 e 2.2 foram capazes de indentificá-lo como tal.

Na sequência, são apresentados três sistemas incertos contínuos no tempo e, portanto, a região considerada para a análise de \mathcal{D} -estabilidade robusta é a porção do plano complexo determinada pelo semi-plano esquerdo, conforme definido por \mathcal{R}_C na equação (2.5).

Exemplo 2.6 Considere o sistema incerto contínuo no tempo com matriz dinâmica $A(\alpha)$ dada pela combinação convexa dos seguintes vértices:

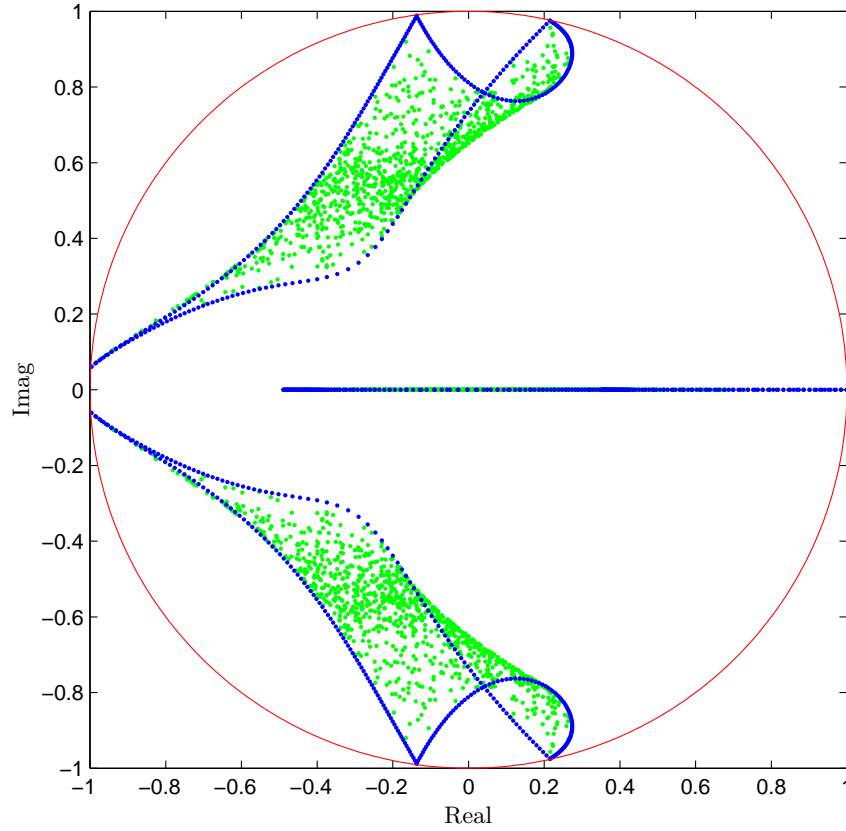


Figura 2.13: Nuvem de autovalores associada ao sistema discreto dado por (2.52)-(2.54), identificado como estável apenas pelas condições EC_1 e EC_2 .

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.673 & -0.969 & 0.863 \\ -0.455 & -0.387 & -0.068 \\ -0.602 & -0.109 & -1.043 \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.329 & 0.344 & 0.362 \\ 0.05 & -0.345 & -0.241 \\ -0.594 & -0.96 & -0.358 \end{bmatrix}, \quad (2.56)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.145 & -0.39 & 0.364 \\ 0.418 & -0.771 & -0.394 \\ -0.142 & -0.613 & -0.067 \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

que define um politopo estável (veja Figura 2.14).

Este sistema incerto não foi identificado como estável por nenhuma das condições EQ_1 , EE e ER_2 . Porém, a estabilidade pode ser verificada, utilizando-se o Teorema 2.1 (ou o Teorema 2.2).

Exemplo 2.7 Um exemplo simples, também gerado aleatoriamente, com $n = 2$ estados e $N = 3$ vértices, ilustra como um politopo estável é resolvido pelos critérios ER_2 , EC_1 e EC_2 , não verificando nem a condição de estabilidade quadrática EQ nem a condição EE proposta em [PABB00]. Os vértices do politopo são dados pelas matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3.100 & 4.700 \\ -8.200 & -13.300 \end{bmatrix}, \quad (2.58)$$

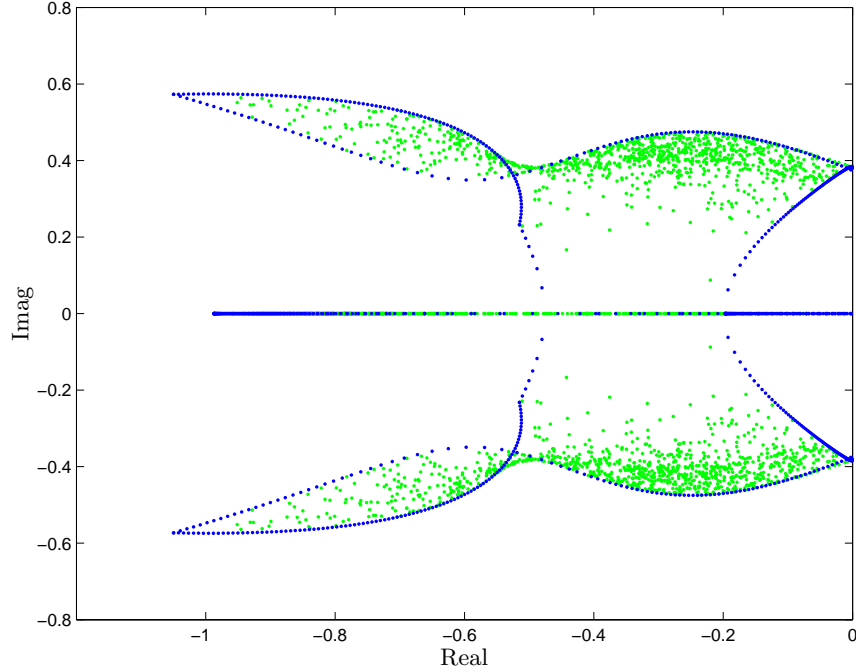


Figura 2.14: Nuvem de autovalores do sistema incerto contínuo no tempo descrito pelos vértices dados por (2.55)-(2.57), identificado como estável apenas pelas condições EC_1 e EC_2 .

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1.300 & -2.100 \\ 9.100 & 1.200 \end{bmatrix}, \quad (2.59)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.300 & -6.000 \\ 9.500 & -1.500 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

e a região de estabilidade é ilustrada na Figura 2.15.

Exemplo 2.8 Considere-se o sistema incerto contínuo no tempo, pertencente a um politopo convexo cujos vértices são dados por

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.502 & 0.560 & -0.179 \\ 0.708 & -0.593 & 0.122 \\ 0.589 & 0.023 & -0.233 \end{bmatrix}, \quad (2.61)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.410 & 0.159 & -0.689 \\ -0.839 & -0.779 & -0.200 \\ 0.460 & 0.666 & -0.158 \end{bmatrix}, \quad (2.62)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.808 & -0.845 & 0.207 \\ 0.672 & 0.641 & -0.423 \\ -0.912 & -0.090 & -0.575 \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

A nuvem de autovalores está ilustrada na Figura 2.16. As condições EE , EQ_1 , ER_2 não são factíveis para este sistema. Já as condições propostas neste capítulo, EC_1 e EC_2 , identificam esse sistema como robustamente \mathcal{D} -estável.

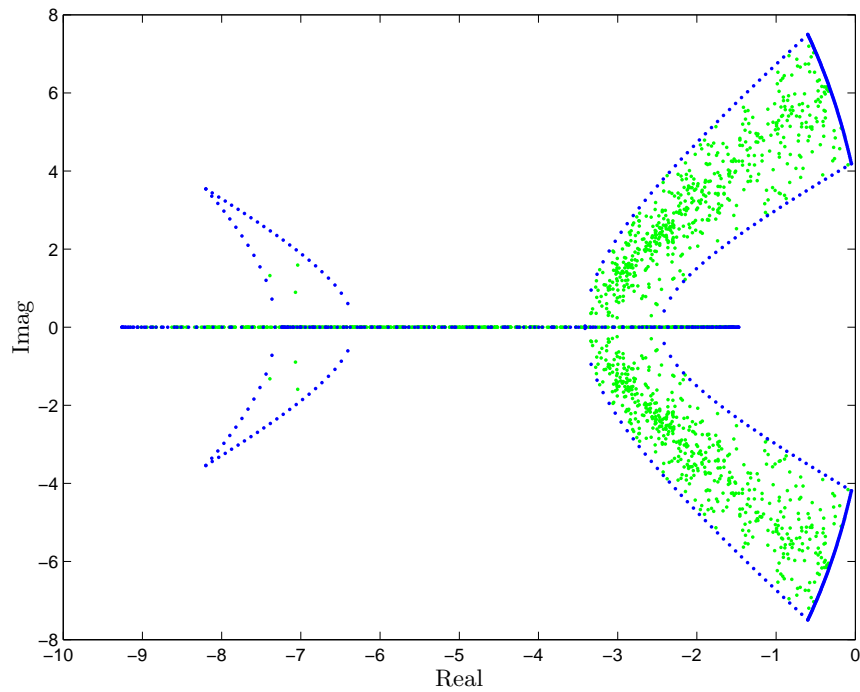


Figura 2.15: Nuvem de autovalores do sistema contínuo dado por (2.58)-(2.60), identificado como estável apenas pelas condições ER_2 , EC_1 e EC_2 .

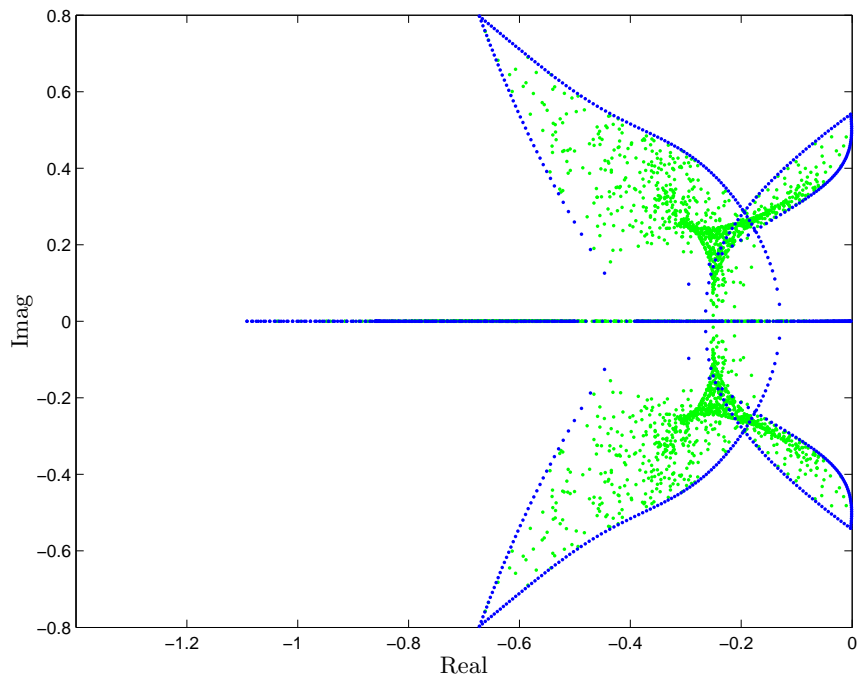


Figura 2.16: Nuvem de autovalores do sistema contínuo dado por (2.61)-(2.63), identificado como estável apenas pelas condições EC_1 e EC_2 .

2.6 Conclusões

Condições formuladas em termos de testes de factibilidade de um conjunto de LMIs definidas nos vértices do politopo de incertezas foram propostas para o estudo de \mathcal{D} -estabilidade robusta de sistemas li-

neares incertos em domínios politópicos. Embora essas condições apresentem uma complexidade numérica maior que outras baseadas em funções de Lyapunov linearmente dependentes de parâmetro, a melhora no número de politopos estáveis identificados é significativa. Em especial, a condição do Teorema 2.1 proporciona uma avaliação positiva, sempre que alguma das outras condições o fazem. Além disso, na maior parte dos casos, as condições do Teorema 2.1 identificam um número bem maior de politopos estáveis que as demais condições. Mesmo com um número mais elevado de variáveis escalares e de linhas nas LMIs, as condições do Teorema 2.1 podem ser processadas em tempo polinomial por meio de algoritmos de pontos interiores. Um estudo sobre a abrangência das condições propostas foi apresentado, evidenciando-se a efetiva melhora na detecção de sistemas incertos robustamente estáveis. Vários exemplos foram apresentados, ilustrando o menor conservadorismo associado às condições propostas neste capítulo. A partir dos resultados apresentados, diversas extensões e generalizações podem ser aventadas, como, por exemplo, o cômputo de custos garantidos \mathcal{H}_2 [dOL⁺04a] e \mathcal{H}_∞ [dOL⁺04b].

Capítulo 3

\mathcal{D} -estabilidade robusta de matrizes polinomiais

Condições suficientes para a \mathcal{D} -estabilidade robusta de um politopo de matrizes polinomiais são propostas neste capítulo, isto é, testes que assegurem a pertinência de todos os zeros de um polinômio matricial incerto a uma região \mathcal{D} do plano complexo. Os testes de estabilidade são baseados em LMIs formuladas nos vértices do politopo de incertezas que, se factíveis, fornecem uma função de Lyapunov dependente de parâmetro que garante a estabilidade de qualquer polinômio matricial no domínio de incerteza. São analisados os casos de estabilidade em tempo contínuo (semi-plano esquerdo) e em tempo discreto (interior do círculo unitário). Essas condições generalizam e contêm outras que surgiram recentemente na literatura e proporcionam um método numérico eficaz para a análise de \mathcal{D} -estabilidade robusta de polinômios matriciais. Experimentos numéricos mostram que as condições propostas produzem resultados menos conservadores quando comparados aos obtidos com a estabilidade quadrática e aos obtidos por meio de métodos recentes da literatura. Os resultados apresentados neste capítulo podem ser encontrados em parte nas publicações [LOdP04] e [dOLP04].

3.1 Introdução

Testes de estabilidade para polinômios têm tido destaque na literatura especializada nos últimos anos, como, por exemplo, o resultado de Kharitonov [Kha78] para polinômios com coeficientes definidos por intervalos, ou o chamado teorema das bordas [BHL88] para politopos de polinômios. Veja-se também [Bar94] e [BCK95] para maiores detalhes sobre estabilidade robusta de polinômios. Entretanto, a extensão desses resultados para tratar politopos de matrizes polinomiais não parece ser imediata, e testes conclusivos sobre a estabilidade de famílias de polinômios cujos coeficientes são funções multilineares dos parâmetros de incertezas são problemas NP-difíceis [BT00].

Em [HAPŠ01], condições formuladas em termos de LMIs recentemente publicadas na literatura para testar a estabilidade de um politopo de matrizes [GdOH98], [dOBG99], [PABB00] foram estendidas para o caso de politopos de matrizes polinomiais. Mais recentemente, novas condições LMI menos conservativas foram publicadas para a análise de estabilidade de sistemas lineares discretos [RP01a] e contínuos no tempo [RP01b], [RP02].

Neste capítulo, condições suficientes para a \mathcal{D} -estabilidade robusta de politopos de matrizes polinomiais

são formuladas em termos de LMIs, obtidas a partir da extensão dos resultados de [LP03a] (também discutidos no Capítulo 2). Essas condições produzem resultados menos conservadores que os obtidos com métodos baseados na estabilidade quadrática e também menos conservadores que os de [HAPŠ01], principalmente quando a complexidade (isto é, grau, ordem e número de vértices) dos politopos de matrizes polinomiais aumenta, como mostram os testes realizados com polinômios matriciais estáveis na seção de exemplos. A \mathcal{D} -estabilidade robusta do politopo é assegurada por um simples teste de factibilidade de um conjunto de LMIs definidas nos vértices do domínio de incertezas, realizado de maneira eficiente com algoritmos de complexidade polinomial [GNLC95].

3.2 Preliminares

Considere uma matriz polinomial quadrada $A(s)$ de dimensão n e grau g com coeficientes $A^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, 1, \dots, g$, que se escreve como

$$A(s) = A^0 + A^1 s + \dots + A^g s^g, \quad (3.1)$$

com $s \in \mathbb{C}$. Defina-se a matriz constante $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times (g+1)n}$, associada a $A(s)$, como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A^0 & A^1 & \dots & A^{g-1} & A^g \end{bmatrix}; \quad A^g = \mathbf{I}_n, \quad (3.2)$$

cujo espaço nulo à direita $\mathcal{N}_{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{(g+1)n \times gn}$, isto é $\mathbf{A}\mathcal{N}_{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$, pode ser dado por

$$\mathcal{N}_{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{I}_g \otimes \mathbf{I}_n}{-A^0} & \frac{\mathbf{I}_g \otimes \mathbf{I}_n}{-A^1} & \dots & \frac{\mathbf{I}_g \otimes \mathbf{I}_n}{-A^{g-1}} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Um zero de $A(s)$ é definido como [Kai80] o valor complexo ζ para o qual ocorre uma perda de posto da matriz $A(s)$, ou seja, $\text{posto}\{A(\zeta)\} < \text{posto}\{A(s)\}$, e pode ser determinado por meio do cômputo do determinante de $A(s)$. Note-se que, definida uma sub-região \mathcal{D} do plano complexo, o problema de análise da \mathcal{D} -estabilidade de $A(s)$ resume-se a determinar condições que assegurem que todos os zeros de $A(s)$ pertençam a \mathcal{D} . O objetivo deste capítulo é estabelecer condições que assegurem a \mathcal{D} -estabilidade robusta de matrizes polinomiais incertas, $A(s, \alpha)$. Isto é, determinar condições que verifiquem se todos os zeros de $A(s, \alpha)$ pertencem a uma determinada região \mathcal{D} do plano complexo para todo α admissível. Para isso, considere-se a descrição de região convexa \mathcal{D} dada em (2.3), desta vez tomando apenas as regiões de ordem $d = 1$, isto é, para $R_{11} = r_{11}$, $R_{12} = r_{12}$ e $R_{22} = r_{22}$ escalares. Assim, condidere-se neste capítulo a porção do plano complexo determinada por

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} 1 & z \end{bmatrix} \mathcal{R} \begin{bmatrix} 1 & z \end{bmatrix}^* < 0 \right\}, \quad (3.4)$$

em que

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix}; \quad r_{22} \geq 0 \quad (3.5)$$

Como no Capítulo 2, constituem regiões de particular interesse o semi-plano esquerdo e o círculo unitário centrado na origem do plano complexo, para as quais tem-se, respectivamente, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_C$ e $\mathcal{R} = \mathcal{R}_D$ dados em (2.5). Para detalhes referentes a outras formas de definição de regiões do plano complexo, veja-se [CG96], [HAPŠ01], [HBŠ01], [PABB00]. Por simplicidade, e sem perda de generalidade,

assume-se que não há, no conjunto de matrizes polinomiais incertas, matrizes com zeros no infinito, e também que o termo de grau g é uma matriz identidade de dimensão n , $A^g \equiv \mathbf{I}_n$ [HBŠ01].

De maneira similar ao caso precisamente conhecido, defina-se para a j -ésima matriz polinomial

$$A_j(s) = A_j^0 + A_j^1 s + \cdots + \mathbf{I}_n s^g \quad (3.6)$$

de dimensão n e grau g a j -ésima matriz constante $\mathbf{A}_j \in \mathbb{R}^{n \times (g+1)n}$ dada por

$$\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} A_j^0 & A_j^1 & \cdots & A_j^g \end{bmatrix}; \quad A_j^g = \mathbf{I}_n \quad (3.7)$$

Portanto, dadas N matrizes polinomiais de dimensão n e grau g , com coeficientes reais representados por A_j , $j = 1, \dots, N$ define-se o politopo \mathbb{A} que contém as matrizes

$$A(s, \alpha) = \alpha_1 A_1(s) + \cdots + \alpha_N A_N(s); \quad \alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$$

como

$$\mathbb{A} \triangleq \left\{ \mathbf{A}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times gn} : \mathbf{A}(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \mathbf{A}_j \ ; \ \alpha_j \geq \mathbf{0}, \ \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 \right\} \quad (3.8)$$

Denotando por $\mathcal{N}_{\mathbf{A}_j} \in \mathbb{R}^{(g+1)n \times gn}$ uma base do espaço nulo à direita da matriz \mathbf{A}_j , ou seja, $\mathbf{A}_j \mathcal{N}_{\mathbf{A}_j} = \mathbf{0}$, e lembrando que por hipótese $A^g = \mathbf{I}_n$, tem-se

$$\mathcal{N}_{\mathbf{A}_j} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_g \otimes \mathbf{I}_n \\ -A_j^0 & -A_j^1 & \cdots & -A_j^{g-1} \end{bmatrix}; \quad j = 1, \dots, N \quad (3.9)$$

Note-se que, utilizando-se a estrutura acima para a matriz $\mathcal{N}_{\mathbf{A}_j}$, tem-se que $\mathcal{N}_{\mathbf{A}(\alpha)}$ é uma base para o espaço nulo à direita de $\mathbf{A}(\alpha)$ que se escreve

$$\mathcal{N}_{\mathbf{A}(\alpha)} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \mathcal{N}_{\mathbf{A}_j} \ ; \ \alpha_j \geq \mathbf{0}, \ \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 \quad (3.10)$$

Como em [HAPŠ01], defina-se ainda a matriz de projeção $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^{2gn \times (g+1)n}$

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_g \otimes \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{gn \times n} \\ \mathbf{0}_{gn \times n} & \mathbf{I}_g \otimes \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

A seguir são apresentadas definições e condições fundamentais encontradas na literatura, utilizadas posteriormente para a obtenção do resultado principal.

Definição 3.1 *A matriz polinomial $A(s)$ dada em (3.1) é \mathcal{D} -estável se todos os seus zeros pertencem à região \mathcal{D} do plano complexo descrita por (3.4)-(3.5).*

Uma condição para verificar a \mathcal{D} -estabilidade de um polinômio matricial precisamente conhecido é dada no lema seguinte.

Lema 3.1 *A matriz polinomial $A(s)$ é \mathcal{D} -estável se e somente se existe uma matriz definida positiva $P = P' \in \mathbb{R}^{gn \times gn}$, tal que*

$$\mathcal{N}_{\mathbf{A}}' \mathcal{T}' (\mathcal{R} \otimes P) \mathcal{T} \mathcal{N}_{\mathbf{A}} < 0 \quad (3.12)$$

Prova: Veja-se [HAPŠ01]. ■

Para o caso incerto, considere-se a seguinte definição de \mathcal{D} -estabilidade robusta.

Definição 3.2 *O politopo de matrizes polinomiais \mathbb{A} é robustamente \mathcal{D} -estável se todos os zeros de $A(\alpha) \in \mathbb{A}$ pertencem à região \mathcal{D} descrita por (3.4)-(3.5).*

Condições necessárias e suficientes para a \mathcal{D} -estabilidade robusta de $A(\alpha) \in \mathbb{A}$ são dadas no próximo lema.

Lema 3.2 *As seguintes assertivas são equivalentes*

- a) *O politopo de matrizes polinomiais \mathbb{A} é robustamente \mathcal{D} -estável.*
- b) *Existe uma matriz definida positiva dependente de parâmetro $P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{gn \times gn}$ tal que*

$$\mathcal{N}'_{A(\alpha)} T'(\mathcal{R} \otimes P(\alpha)) T \mathcal{N}_{A(\alpha)} < \mathbf{0} \quad (3.13)$$

- c) *Existe uma matriz definida positiva dependente de parâmetro $P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{gn \times gn}$ e uma matriz dependente de parâmetro $Q(\alpha) \in \mathbb{R}^{2gn \times n}$, tais que*

$$M(\alpha) \triangleq T'(\mathcal{R} \otimes P(\alpha)) T + A(\alpha)' Q(\alpha)' T + T' Q(\alpha) A(\alpha) < \mathbf{0} \quad (3.14)$$

Prova: A equivalência entre a) e b) vem do Lema 3.1, com $P(\alpha)$ e $\mathcal{N}_{A(\alpha)}$ substituindo respectivamente P e \mathcal{N}_A (veja detalhes em [HAPŠ01]).

A equivalência entre b) e c) pode ser provada, usando-se o Lema de Finsler [dOS01], pois (3.13) implica que existe um escalar $\mu(\alpha) \in \mathbb{R}_+$, tal que

$$T'(\mathcal{R} \otimes P(\alpha)) T - \mu(\alpha) A(\alpha)' A(\alpha) < \mathbf{0}$$

seja assegurado ($A(\alpha) \mathcal{N}_{A(\alpha)} = \mathbf{0}$), resultando, portanto, em (3.14) com a escolha

$$T' Q(\alpha) = -\mu(\alpha) \frac{A(\alpha)'}{2}$$

O contrário, (3.14) \Rightarrow (3.13), pode ser visto multiplicando (3.14) por $\mathcal{N}'_{A(\alpha)}$ à esquerda e pelo conjugado transposto à direita, o que completa a prova. ■

Note-se que a \mathcal{D} -estabilidade de qualquer $A(\alpha)$ dentro do politopo \mathbb{A} pode ser decidida por meio da existência de $P(\alpha) = P(\alpha)'$ na equação (3.13) ou em (3.14). Nesta última, uma variável matricial extra, $Q(\alpha)$, também aparece. Entretanto, um número infinito de pontos α (no caso de α possuir alguma continuidade em seu domínio) precisaria ser verificada para assegurar a estabilidade de todo o politopo \mathbb{A} .

Uma simplificação largamente empregada na literatura é utilizar uma mesma matriz $P = P'$, fixa e independente de parâmetro, para assegurar a \mathcal{D} -estabilidade de todo o politopo \mathbb{A} . Nesse caso, tem-se a \mathcal{D} -estabilidade quadrática de \mathbb{A} .

Lema 3.3 *O politopo de matrizes polinomiais \mathbb{A} é quadraticamente \mathcal{D} -estável se existir uma matriz definida positiva independente de parâmetro, $P = P \in \mathbb{R}^{gn \times gn}$, tal que*

$$\mathcal{N}'_{A_j} T'(\mathcal{R} \otimes P) T \mathcal{N}_{A_j} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (3.15)$$

Na seqüência, são dadas condições suficientes para a \mathcal{D} -estabilidade robusta do politopo \mathbb{A} , expressas como um conjunto finito de LMIs definidas nos vértices de \mathbb{A} .

3.3 Condições para a \mathcal{D} -estabilidade do politopo \mathbb{A}

O teorema a seguir fornece condições suficientes para a estabilidade robusta de \mathbb{A} em relação a uma região genérica do plano complexo definida pela matriz \mathcal{R} , a partir de um número finito de desigualdades matriciais lineares.

Teorema 3.1 *O politopo de matrizes polinomiais \mathbb{A} é robustamente \mathcal{D} -estável se existirem matrizes definidas positivas $P_j = P'_j \in \mathbb{R}^{gn \times gn}$ e matrizes $Q_j \in \mathbb{R}^{2gn \times n}$, $j = 1, \dots, N$, soluções do problema de factibilidade das LMIs*

$$M_j \triangleq T'(\mathcal{R} \otimes P_j)T + A'_j Q'_j T + T' Q_j A_j < -(\mathbf{I}_{g+1} \otimes \mathbf{I}_n); \quad j = 1, \dots, N \quad (3.16)$$

$$M_{jk} \triangleq T'[\mathcal{R} \otimes (2P_j + P_k)]T + (A'_j Q'_j + A'_j Q'_k + A'_k Q'_j)T + T'(Q_j A_j + Q_k A_j + Q_j A_k) < \frac{1}{(N-1)^2}(\mathbf{I}_{g+1} \otimes \mathbf{I}_n);$$

$$j = 1, \dots, N, \quad k \neq j, \quad k = 1, \dots, N \quad (3.17)$$

$$M_{jkl} \triangleq 2T'[\mathcal{R} \otimes (P_j + P_k + P_\ell)]T + (A'_j Q'_\ell + A'_\ell Q'_j + A'_k Q'_\ell + A'_\ell Q'_k + A'_j Q'_k + A'_k Q'_j)T$$

$$+ T'(Q_j A_\ell + Q_\ell A_j + Q_k A_\ell + Q_\ell A_k + Q_k A_j + Q_j A_k) < \frac{6}{(N-1)^2}(\mathbf{I}_{g+1} \otimes \mathbf{I}_n);$$

$$j = 1, \dots, N-2, \quad k = j+1, \dots, N-1, \quad \ell = k+1, \dots, N \quad (3.18)$$

com N_{A_j} e T dados, respectivamente, em (3.9) e (3.11). Em caso afirmativo, a matriz definida positiva $P(\alpha)$ dada por

$$P(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j P_j > 0, \quad \alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 \quad (3.19)$$

e

$$Q(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j Q_j > 0, \quad \alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 \quad (3.20)$$

satisfazem as condições do Lema 3.2.

Prova: Seguem-se passos similares aos da prova do Teorema 2.1, apresentada no Capítulo 2. $P(\alpha)$ dada por (3.19) é claramente uma matriz dependente de parâmetro definida positiva ($P_j = P'_j > 0$). Usando novamente (3.19), (3.20) e $A(\alpha) \in \mathbb{A}$, é possível obter

$$M(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j^3 M_j + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1; k \neq j}^N \alpha_j^2 \alpha_k M_{jk} + \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=j+1}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \alpha_j \alpha_k \alpha_\ell M_{jkl} \quad (3.21)$$

Impondo (3.16)-(3.18) e considerando que $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \dots, N$, $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$, a equação (3.21) implica

$$M(\alpha) < -\left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^3 - \frac{1}{(N-1)^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j; k=1}^N \alpha_j^2 \alpha_k - \frac{6}{(N-1)^2} \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=j+1}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \alpha_j \alpha_k \alpha_\ell \right) (\mathbf{I}_{g+1} \otimes \mathbf{I}_n) \quad (3.22)$$

Usando-se ϕ_1 e ϕ_2 já definidos no Capítulo 2, equações (2.18) e (2.19), mostra-se que $(N-1)\phi_1 + \phi_2 \geq 0$, implicando que as condições do Lema 3.2 são verificadas, garantindo a \mathcal{D} -estabilidade robusta do politopo \mathbb{A} . ■

Primeiramente, note-se que a imposição de $(\mathbf{I}_{g+1} \otimes \mathbf{I}_n)$ no lado de direito de (3.16)-(3.18) pode ser feita sem perda de generalidade, já que essas expressões são homogêneas em P_j , e a \mathcal{D} -estabilidade dos vértices é condição necessária para a \mathcal{D} -estabilidade do domínio \mathbb{A} . De fato, a matriz no lado direito de (3.22) pode ser escolhida de forma arbitrária, desde que seja semidefinida positiva e de dimensões $(g+1)n \times (g+1)n$. Espera-se que algum grau extra de liberdade seja obtido se essa matriz for substituída por outra dependente do parâmetro α . Entretanto, esse caso não é investigado nesta tese, que considera o lado direito de (3.22) como uma matriz fixa (independente de parâmetro).

Observe-se ainda que, para uma matriz polinomial precisamente conhecida, $N = 1$, apenas a condição (3.16) precisa ser verificada com P_1 e Q_1 . A condição (3.18) precisa ser considerada apenas para $N \geq 3$.

É possível recuperar a condição de \mathcal{D} -estabilidade quadrática do Lema 3.3 a partir do Teorema 3.1, impondo $Q_j = Q$ e $P_j = P = P'$, $j = 1, \dots, N$ nas condições (3.16)-(3.18). Além disso, a condição de \mathcal{D} -estabilidade robusta proposta em [HAPŠ01] pode ser recuperada a partir das condições do Teorema 3.1, equação (3.16), simplesmente impondo $Q_j = Q$, $j = 1, \dots, N$ e usando a propriedade da homogeneidade das LMIs. Nesse caso, as condições (3.17)-(3.18) são sempre verificadas, o que pode ser comprovado adicionando-se apropriadamente versões de (3.16).

As condições dos Teoremas 1 (caso contínuo no tempo) e 2 (caso discreto no tempo) de [dOP02] podem ser recuperadas a partir do Teorema 3.1. Para isso, considere-se as regiões \mathcal{R}_C (semi-plano complexo esquerdo de \mathbb{R}^2) e \mathcal{R}_D (círculo unitário centro na origem de \mathbb{R}^2) definidas em (2.5). Levando \mathcal{R}_C às equações do Teorema 3.1, impondo $Q_j = Q$, $j = 1, \dots, N$ em (3.16)-(3.17), multiplicando (3.16) por \mathcal{N}'_{A_j} pela esquerda e por seu transposto conjugado pela direita, e multiplicando (3.17) por $\mathcal{N}'_{2A_j+A_k}$ pela esquerda e por seu conjugado transposto pela direita. Com as considerações acima, a desigualdade (3.18) é sempre verificada.

De maneira similar, a condição de estabilidade de matrizes polinomiais incertas discretas no tempo proposta no Teorema 2 de [dOP02] pode ser recuperada das condições do Teorema 3.1. Para isso, basta impor $Q_j = Q$, $j = 1, \dots, N$ em (3.16)-(3.18) e multiplicar essas equações à direita e à esquerda por combinações adequadas de \mathcal{N}'_{A_j} e \mathcal{N}_{A_j} , respectivamente.

Portanto, o Teorema 3.1 contém e estende os resultados de [HAPŠ01] (fazendo uso de uma matriz dependente de parâmetro $Q(\alpha)$ ao invés de uma fixa, Q) e de [dOP02] (ao considerar $Q(\alpha)$ e generalizar a região do plano complexo a ser testada).

Neste capítulo, são estudadas regiões de \mathcal{D} -estabilidade amplamente utilizadas no contexto de sistemas contínuos e discretos no tempo: o semi-plano esquerdo e o círculo unitário centrado na origem do plano complexo. Outras regiões de primeira ordem são também de grande interesse e podem, também, ser investigadas. Por exemplo, a \mathcal{D} -estabilidade robusta de politopos de matrizes polinomiais em relação ao círculo de raio r , com centro em $(-\sigma, 0)$ — deslocado de uma distância $\sigma - r$ à esquerda do eixo imaginário — ilustrado na Figura 3.1. Essa porção do plano complexo — utilizada em [HB92], [LMP04], [LMPJ02], [LP02], [LP05] — poderia ser investigada por meio das condições do Teorema 3.1, trocando-se \mathcal{R} por

$$\tilde{\mathcal{R}}_D = \begin{bmatrix} 2\sigma^2 - r^2 & -\sigma \\ -\sigma & 1 \end{bmatrix}$$

Note-se que, se os pólos de um sistema contínuo no tempo estão restritos à região ilustrada na Figura 3.1, garante-se que toda a dinâmica do sistema pode ser limitada por exponenciais com decaimento

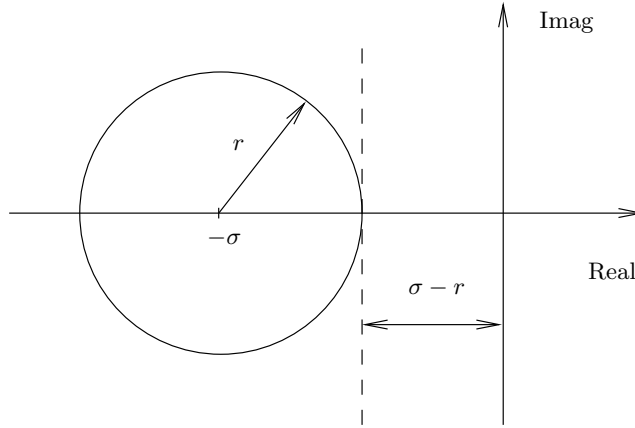


Figura 3.1: Região do plano complexo descrita por $\tilde{\mathcal{R}}_D$.

no intervalo $-\sigma \pm r$ e frequências (parte imaginária dos pólos) menores ou iguais a r . Em particular, para sistemas de segunda ordem, essa região do plano complexo garante um fator de amortecimento (no pior caso) dado pelo cosseno do ângulo determinado pela reta que tangencia o círculo e passa pela origem, e máxima frequência natural amortecida limitada pelo raio do círculo.

Como observado no Capítulo 2 com relação às condições LMI do Teorema 2.1, o Teorema 3.1 foi obtido utilizando-se uma expansão em α_j com grau três, conforme indicado na equação (3.21). Um resultado similar, porém mais conservador, pode ser obtido utilizando-se uma expansão em α_j com grau dois, conforme apresentado no teorema a seguir.

Teorema 3.2 *O politopo de matrizes polinomiais \mathbb{A} é robustamente \mathcal{D} -estável se existirem matrizes definidas positivas $P_j \in \mathbb{R}^{gn \times gn}$ e matrizes $Q_j \in \mathbb{R}^{2gn \times n}$, $j = 1, \dots, N$, soluções de (3.16) e*

$$\tilde{M}_{jk} \triangleq \mathcal{T}'[\mathcal{R} \otimes (P_j + P_k)]\mathcal{T} + (\mathbf{A}'_j Q'_k + \mathbf{A}'_k Q'_j)\mathcal{T} + \mathcal{T}'(Q_k \mathbf{A}_j + Q_j \mathbf{A}_k) < \frac{2}{N-1}(\mathbf{I}_{g+1} \otimes \mathbf{I}_n);$$

$$j = 1, \dots, N-1, k = j+1, \dots, N \quad (3.23)$$

com $\mathcal{N}_{\mathbf{A}_j}$ e \mathcal{T} dados, respectivamente, em (3.9) e (3.11). Em caso afirmativo, $P(\alpha)$ e $Q(\alpha)$ dadas respectivamente por (3.19) e (3.20) satisfazem as condições do Lema 3.2.

Prova: Seguem-se passos similares aos da prova do Teorema 2.2, apresentada no Capítulo 2. $P(\alpha)$ dada por (3.19) é claramente uma matriz dependente de parâmetro definida positiva ($P_j = P'_j > \mathbf{0}$). Usando novamente (3.19), (3.20) e $\mathbf{A}(\alpha) \in \mathbb{A}$, é possível obter

$$\mathbf{M}(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 \mathbf{M}_j + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \alpha_j \alpha_k \tilde{\mathbf{M}}_{jk} \quad (3.24)$$

Impondo-se (3.16) e (3.23) e considerando-se que $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \dots, N$, $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$, a equação (3.24) implica

$$\mathbf{M}(\alpha) < -\left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^2 - \frac{2}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \alpha_j \alpha_k \right) (\mathbf{I}_{g+1} \otimes \mathbf{I}_n) \leq \mathbf{0}, \quad (3.25)$$

pois a expressão em α dentro dos parênteses é sempre maior ou igual a zero (veja equação (2.29)). ■

As condições do Teorema 3.2 contêm as condições LMI do Lema 3.3, as condições propostas em [HAPŠ01] e o Teorema 1 de [dOP02]. Entretanto, o Teorema 2 proposto em [dOP02] (caso discreto no tempo) não está contido no Teorema 3.2 devido à diferença de grau em α_j (veja lado direito de (3.21) e (3.24)). Portanto, as condições do Teorema 3.2 são apenas suficientes para aquelas do Teorema 3.1.

3.3.1 Polinômios matriciais de primeira ordem

Um caso de especial interesse para a análise de \mathcal{D} -estabilidade robusta é quando o grau do polinômio matricial é $g = 1$. Nesse caso, o estudo da \mathcal{D} -estabilidade robusta do polinômio matricial equivale à investigação da \mathcal{D} -estabilidade de sistemas dinâmicos lineares do tipo $\delta[x(t)] = A(\alpha)x(t)$. Considere-se o polinômio matricial de primeira ordem dado por

$$A(s, \alpha) = -A(\alpha) + s\mathbf{I}_n \quad (3.26)$$

Nesse caso, as condições propostas neste capítulo recuperam aquelas propostas no Capítulo 2, para regiões de primeira ordem ($d = 1$).

Assim, para o polinômio matricial de grau $g = 1$ dado por (3.26) com $A(\alpha) \in \mathcal{A}$, veja (2.2), as regiões de estabilidade referentes ao caso contínuo no tempo e ao caso discreto no tempo descritas por meio das matrizes \mathcal{R}_C e \mathcal{R}_D , dadas em (2.5), podem ser recuperadas. Usando a formulação do Teorema 3.1 com $g = 1$ e assumindo

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}; \quad A_j = \begin{bmatrix} -A_j & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}; \quad Q_j = \begin{bmatrix} -F_j \\ -G_j \end{bmatrix}; \quad j = 1, \dots, N,$$

obtêm-se que as condições (3.16)-(3.18) podem ser reescritas como em (2.20)-(2.22) para $\mathcal{R} = \mathcal{R}_C$ e como em (2.23)-(2.25) para $\mathcal{R} = \mathcal{R}_D$, trocando, em ambos os casos, as matrizes do lado direito das inequações por \mathbf{I}_n , o que não afeta o resultado final, devido à propriedade da homogeneidade.

3.3.2 Complexidade numérica

Em termos de complexidade, métodos de resolução baseados em pontos interiores requerem um número de operações em ponto flutuante da ordem de $\mathcal{K}^3\mathcal{L}$, sendo \mathcal{K} o número de variáveis escalares envolvidas no problema e \mathcal{L} o número de linhas das LMIs [BEFB94], [GNLC95].

A Tabela 3.1 mostra os valores de \mathcal{K} e \mathcal{L} para os Teoremas 3.1 (TE₁) e 3.2 (TE₂), Lema 3.3 (DQ), Teorema 1 proposto em [HAPŠ01] (T1_{HAPS}) e para os Teoremas 1 (T1_{dOOP}) e 2 (T2_{dOOP}) propostos em [dOP02]. Nessa tabela, n é o número de estados do polinômio matricial, N , o número de vértices do politopo \mathbb{A} e g , o grau do polinômio. Sempre que pertinente, as expressões para \mathcal{K} e \mathcal{L} especializadas para o semi-plano esquerdo ou para o círculo unitário centrado na origem (respectivamente, casos contínuo e discreto no tempo) são também apresentadas.

Embora o número de variáveis escalares envolvidas em T1_{dOOP} seja menor do que em T1_{HAPS}, o número de LMIs cresce com N^2 , e esse fator torna-se preponderante para N grande ($N > 20$). Note-se que, no caso discreto, houve um aumento da complexidade em relação ao resultado de T1_{dOOP}, pois, apesar do número de variáveis escalares ter se mantido igual, o número de LMIs aumentou. Finalmente, observe-se que, no caso de matrizes polinomiais na forma $A_j(s) = -(A_j - s\mathbf{I}_n)$, as condições do Teorema 3.1 se reduzem ao resultado de estabilidade robusta de sistemas discretos em [RP01a], seguindo desenvolvimento similar ao apresentado para o caso contínuo (veja os comentários após a prova do Teorema 3.1).

Critério		\mathcal{K} (nº de variáveis)	\mathcal{L} (nº de linhas)
TE ₁	Região \mathcal{D}	$\frac{Nng}{2} ((4+g)n+1)$	$\frac{Nn}{6} (N^2 + 3N + 2 + g(N^2 + 3N + 8))$
	\mathcal{R}_C ou \mathcal{R}_D	$\frac{Nn}{2} (5n+1)$	$\frac{Nn}{3} (N^2 + 3N + 5)$
TE ₂	Região \mathcal{D}	$\frac{Nng}{2} ((4+g)n+1)$	$\frac{Nn}{2} (g(N+3) + N+1)$
	\mathcal{R}_C ou \mathcal{R}_D	$\frac{Nn}{2} (5n+1)$	$Nn(N+2)$
DQ	Região \mathcal{D}	$\frac{gn}{2} (gn+1)$	$gn(N+1)$
	\mathcal{R}_C ou \mathcal{R}_D	$\frac{n}{2} (n+1)$	$n(N+1)$
T1 _{HAPS}	Região \mathcal{D}	$\frac{n}{2} (1 + (1+4d^2)n)$	$(2dN+1)n$
	\mathcal{R}_C ou \mathcal{R}_D	$\frac{n}{2} (5n+1)$	$(2N+1)n$
T2 _{dOOP}	\mathcal{R}_D	$\frac{Nn}{2} (n+1)$	$\frac{Nn}{6} (N^2 + 3N + 8)$
T1 _{dOOP}	\mathcal{R}_C	$\frac{Nn}{2} (n+1)$	$\frac{Nn}{2} (N+3)$

Tabela 3.1: Número de variáveis escalares (\mathcal{K}) e número de linhas LMI (\mathcal{L}) em função do número de estados (n), vértices (N) e grau do polinômio matricial (g), quando pertinente, para as condições propostas nos Teoremas 3.1 (TE₁) e 3.2 (TE₂), no Lema 3.3 (DQ), no Teorema 1 de [HAPŠ01] (T1_{HAPS}) e nos Teoremas 1 (T1_{dOOP}) (semi-plano esquerdo do plano complexo) e 2 (T2_{dOOP}) (círculo unitário centrado na origem do plano complexo) propostos em [dOP02].

O uso de matrizes $P(\alpha)$ dependentes de parâmetro, dadas por (3.19), permitiu o estabelecimento de condições suficientes para a estabilidade robusta do politopo de matrizes polinomiais \mathbb{A} . O número de LMIs do Teorema 3.1 é o mesmo do T2_{dOOP}, mas o número de variáveis escalares é maior.

Uma comparação numérica, utilizando-se valores de $n = 2, 3, 4$, $g = 2, 3, 4$ e $N = 2, 3, 4, 5$, foi realizada para os casos contínuo e discreto no tempo. Foi empregada a mesma metodologia utilizada em [dOP02], conforme segue. Foram gerados 100 politopos de matrizes polinomiais para cada tripla (n, N, g) , adotando-se o seguinte procedimento: (i) os vértices dos politopos são gerados com matrizes cujos elementos são números reais uniformemente distribuídos no intervalo $[-1, 1]$; (ii) para cada vértice, é garantido inicialmente pelo menos um zero com parte real no intervalo $[-5 \times 10^{-2}, -1 \times 10^{-5}]$ (caso contínuo) ou valor absoluto no intervalo $[0.95, 0.98]$ (caso discreto); (iii) os zeros dos politopos são calculados por meio de uma varredura fina e determina-se o zero com maior parte real σ_{max} (caso contínuo) ou maior valor absoluto r_{max} (caso discreto); (iv) em seguida, todo o politopo é deslocado para garantir que exista pelo menos um zero com parte real no intervalo $[-0.001, -1 \times 10^{-5}]$ (caso contínuo) ou com valor absoluto

no intervalo $[0.98, 0.999]$ (caso discreto). O deslocamento é feito substituindo-se z por $z + \sigma_{max} + \epsilon$ (caso contínuo) ou z por $z/(r_{max}/\epsilon)$ (caso discreto).

Como os resultados do Teorema 3.1 contêm aqueles de [HAPŠ01] e [dOP02], essas avaliações numéricas não são reproduzidas aqui. Para uma comparação, veja-se [dOP02]. As avaliações baseadas nas condições de \mathcal{D} -estabilidade quadrática (Lema 3.3) são incluídas aqui apenas como uma referência. Na Tabela 3.2, é mostrado o número de avaliações positivas para ambas as regiões (isto é, para o semi-plano esquerdo e para o disco unitário centrado na origem do plano complexo) obtidas pelo Teorema 3.1 (TE₁) e pela condição LMI (3.15) (DQ).

(a) Caso contínuo no tempo								(b) Caso discreto no tempo					
n	g	2		3		4		2		3		4	
		DQ	TE ₁	DQ	TE ₁	DQ	TE ₁	DQ	TE ₁	DQ	TE ₁	DQ	TE ₁
2	2	29	100	18	100	22	99	18	99	9	99	10	100
	3	8	97	3	98	1	99	1	98	1	98	0	99
	4	3	94	0	96	0	96	0	94	0	96	0	99
	5	2	97	0	96	0	93	0	97	0	96	0	95
3	2	28	100	19	99	18	98	6	99	5	100	1	100
	3	5	97	2	96	1	98	0	98	0	98	0	99
	4	0	95	0	94	1	96	0	95	0	93	0	99
	5	0	90	0	90	0	95	0	93	0	96	0	97
4	2	21	99	19	99	9	97	6	99	4	100	3	100
	3	3	94	4	98	0	97	0	100	0	98	0	100
	4	1	90	1	98	0	95	0	95	0	99	0	100
	5	1	91	0	98	0	89	0	94	0	96	0	99

Tabela 3.2: Politopos estáveis identificados para $n \in [2, 4]$, $g \in [2, 4]$ e $N \in [2, 5]$ com as condições (3.15) (DQ) e Teorema 3.1 (TE₁). Uma centena de politopos de polinômios matriciais robustamente \mathcal{D} -estáveis foram gerados em cada caso.

Como pode ser observado, o comportamento geral da condição TE₁ é bem próximo da necessidade, resultando, em geral, em mais de 95 avaliações positivas por caso. Esse comportamento pode ser melhor visualizado nas figuras 3.2 (região para sistemas contínuos no tempo) e 3.3 (região para sistemas discretos no tempo).

Note-se que o número total de politopos de matrizes polinomiais estáveis identificado pelas condições do Teorema 3.1 permanece quase o mesmo quando a complexidade aumenta, identificando uma quantidade expressiva de politopos que não são detectados pelos métodos propostos em [dOP02] e [HAPŠ01]. Com relação a esses métodos, as condições mais abrangentes do Teorema 3.1 forneceram avaliações positivas sempre que um dos testes foi positivo, identificando inúmeros politopos de matrizes polinomiais estáveis em situações nas quais os demais métodos falharam.

Os testes foram realizados em um computador com processador *Pentium IV* 2.6 GHz com 512 Mbytes de memória RAM usando *Matlab* e o pacote *LMI Control Toolbox* [GNLC95]. O tempo médio de CPU despendido nas condições do Teorema 3.1 fica tipicamente entre 1s (para casos com $n = 2$, $N = 2$ e $g = 2$) e 3000s (para casos com $n = 4$, $N = 5$ e $g = 4$), tanto para sistemas discretos no tempo quanto para os

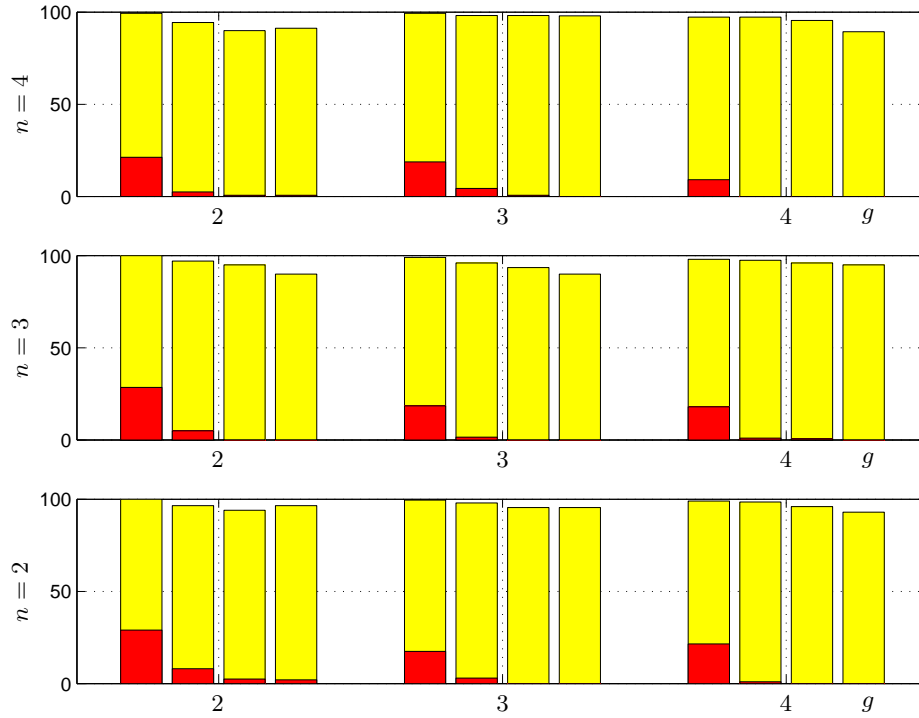


Figura 3.2: Número de polítopos de matrizes polinomiais estáveis identificado pela condição de \mathcal{D} -estabilidade quadrática (DQ) (barras escuras) e pelo Teorema 3.1 (barras claras), para $n = 2, 3$ e 4 , $g = 2, 3$ e 4 e (da esquerda para direita) $N = 2, 3, 4$ e 5 . Caso contínuo no tempo.

sistemas contínuos no tempo.

Observação 3.1 As condições formuladas neste capítulo supõem que o polítopo \mathbb{A} é definido por matrizes reais. Entretanto, se as matrizes em \mathbb{A} são complexas, isto é $\mathbf{A}_j \in \mathbb{C}^{n \times (g+1)n}$, as condições propostas podem ser utilizadas desde que a busca de matrizes $P(\alpha)$ e $Q(\alpha)$ seja feita no campo das matrizes complexas. Neste caso, tem-se $P_j = P_j^* \in \mathbb{C}^{gn \times gn}$, $j = 1, \dots, N$, hermitianas definidas positivas, $Q_j \in \mathbb{C}^{2gn \times n}$, $j = 1, \dots, N$, e a região \mathcal{R} pertence ao plano complexo.

3.4 Exemplos

Alguns exemplos de \mathcal{D} -estabilidade polinomial de matrizes são apresentados. Em todos os casos, apenas o Teorema 3.1 resulta factível (as condições DQ, T1_{HAPS}, T1_{dOOP} e T2_{dOOP} falham). Em cada exemplo, é mostrada a nuvem de zeros da matriz polinomial incerta considerada. Para obter essas nuvens de zeros foi feita, para cada combinação de vértices tomados dois-a-dois, uma varredura com malha fina, calculando os zeros de cada matriz polinomial determinada. Em seguida, foram feitas 5000 combinações convexas aleatórias entre os vértices dados e, para cada uma das matrizes polinomiais determinada, calculados os zeros. Finalmente, todos esses zeros são mostrados no plano complexo.

Exemplo 3.1 Considere-se o polítopo de matrizes polinomiais com vértices dados por

$$A_1(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 0.53s - 0.13 & -0.47s + 0.44 \\ 0.43s - 0.26 & s^2 - 0.02s + 0.78 \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

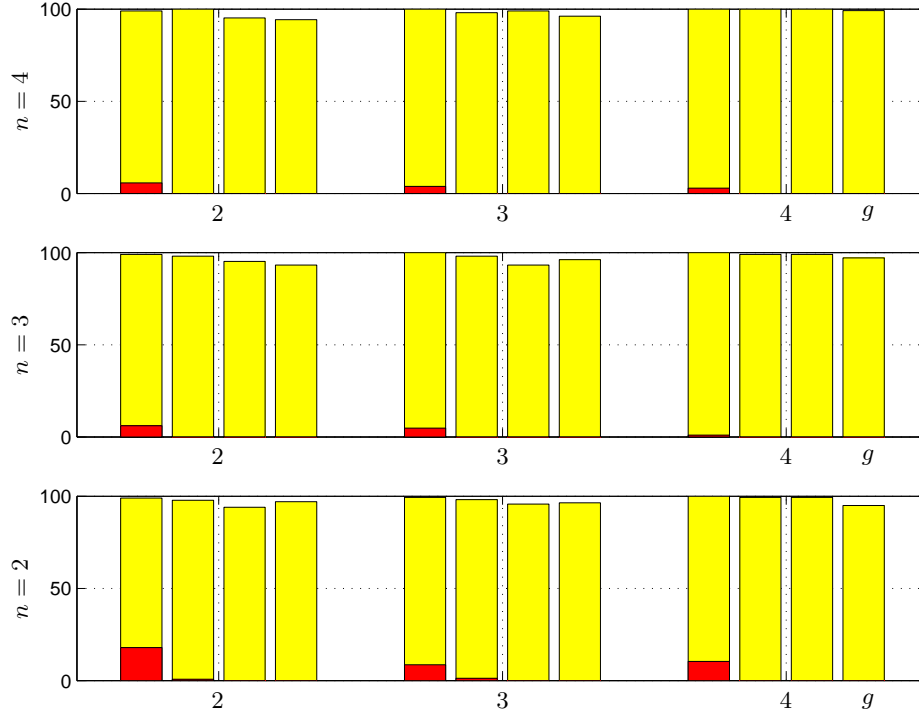


Figura 3.3: Número de politopos de matrizes polinomiais estáveis identificado pela condição de \mathcal{D} -estabilidade quadrática (DQ) (barras escuras) e pelo Teorema 3.1 (barras claras), para $n = 2, 3$ e 4 , $g = 2, 3$ e 4 e (da esquerda para direita) $N = 2, 3, 4$ e 5 . Caso discreto no tempo.

$$A_2(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 1.94s - 0.02 & 0.33s + 0.62 \\ -0.67s - 0.17 & s^2 + 1.95s + 0.04 \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

$$A_3(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 0.62s + 0.23 & -0.48 \\ -0.09s + 0.13 & s^2 + 0.32s + 0.57 \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Como mostrado na Figura 3.4, este é um sistema incerto contínuo no tempo com todos os seus zeros localizados no semi-plano esquerdo do plano complexo. A máxima parte real desses zeros foi calculada (por meio de uma malha fina) como sendo -0.0160 . Usando a região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_C$, equação (2.5), este sistema é identificado como robustamente \mathcal{D} -estável apenas pelas condições do Teorema 3.1.

Exemplo 3.2 Considere o politopo de matrizes polinomiais (sistemas contínuos, $n = 2$, $g = 2$ e $N = 3$ vértices) cujos vértices são dados abaixo:

$$A_1(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 0.82s + 0.99 & -0.79s - 1.03 \\ 0.67 & s^2 + 1.05s + 0.13 \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

$$A_2(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 0.59s + 0.85 & -0.05s - 0.49 \\ 0.75s + 0.75 & s^2 + 0.26s + 0.33 \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

$$A_3(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 0.67s + 0.14 & 0.67s - 1.25 \\ 0.01s - 0.68 & s^2 + 1.79s + 1.13 \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Embora estável, como pode ser visto na Figura 3.5, apenas as condições do Teorema 3.1 conseguiram a identificação correta desse sistema (os demais testes falharam).

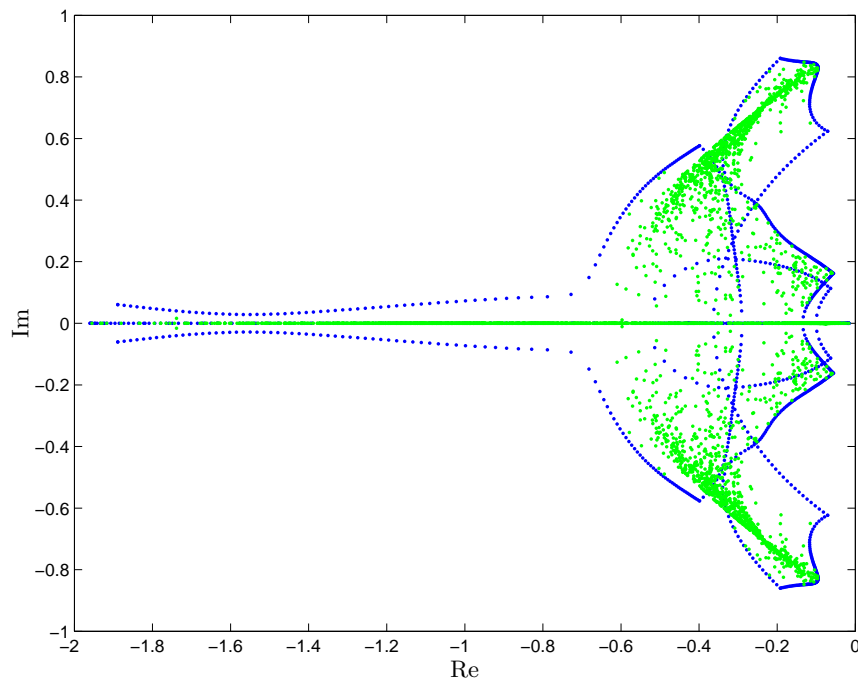


Figura 3.4: Nuvem de zeros para o politopo de matrizes polinomiais descritas pelos vértices (3.27)-(3.29) (caso contínuo no tempo), identificado como estável apenas pelo Teorema 3.1.

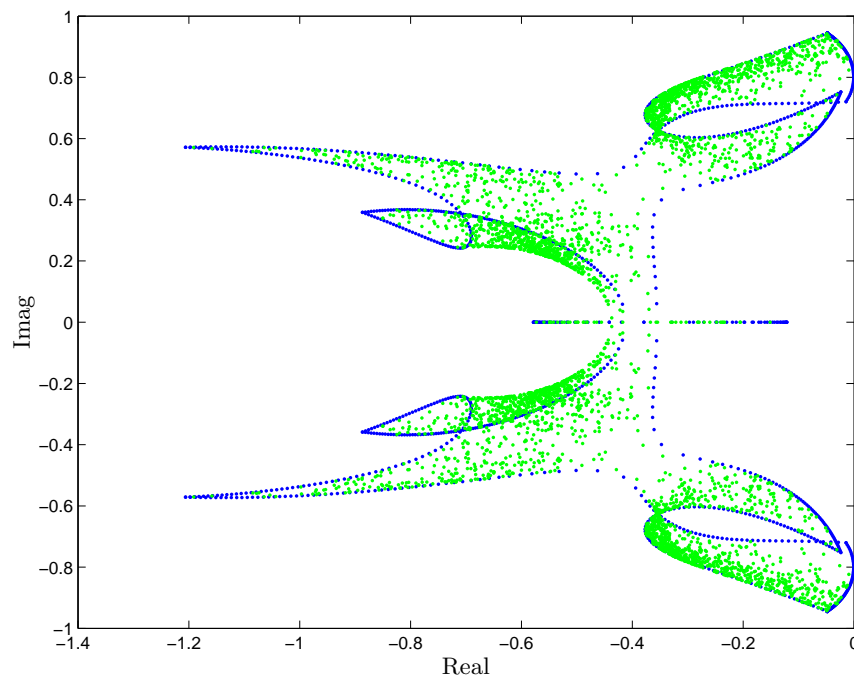


Figura 3.5: Nuvem de zeros para o politopo de matrizes polinomiais descritas pelos vértices (3.30)-(3.32) (caso contínuo no tempo) identificado como estável apenas pelo Teorema 3.1.

Exemplo 3.3 Os vértices de um politopo de matrizes polinomiais, para o qual a região de \mathcal{D} -estabilidade robusta a ser investigada é o círculo unitário com centro na origem do plano complexo, é dado por

$$A_1(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 0.08s - 0.98 & 0.21s - 1.18 \\ -0.41s + 0.50 & s^2 + 0.25s + 0.42 \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

$$A_2(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 0.13s + 0.72 & -0.28s - 0.81 \\ -0.17 & s^2 - 0.47s + 0.78 \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

$$A_3(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 0.43s - 0.36 & -0.08s + 0.55 \\ 0.17s - 0.47 & s^2 + 0.32s - 0.21 \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

A localização dos zeros desse politopo robustamente estável em relação ao círculo unitário centrado na origem do plano complexo é mostrada na Figura 3.6. O máximo valor absoluto dos zeros foi calculado por meio de uma malha fina como sendo 0.9932. Novamente, apenas o Teorema 3.1 foi capaz de identificar o politopo como robustamente \mathcal{D} -estável.

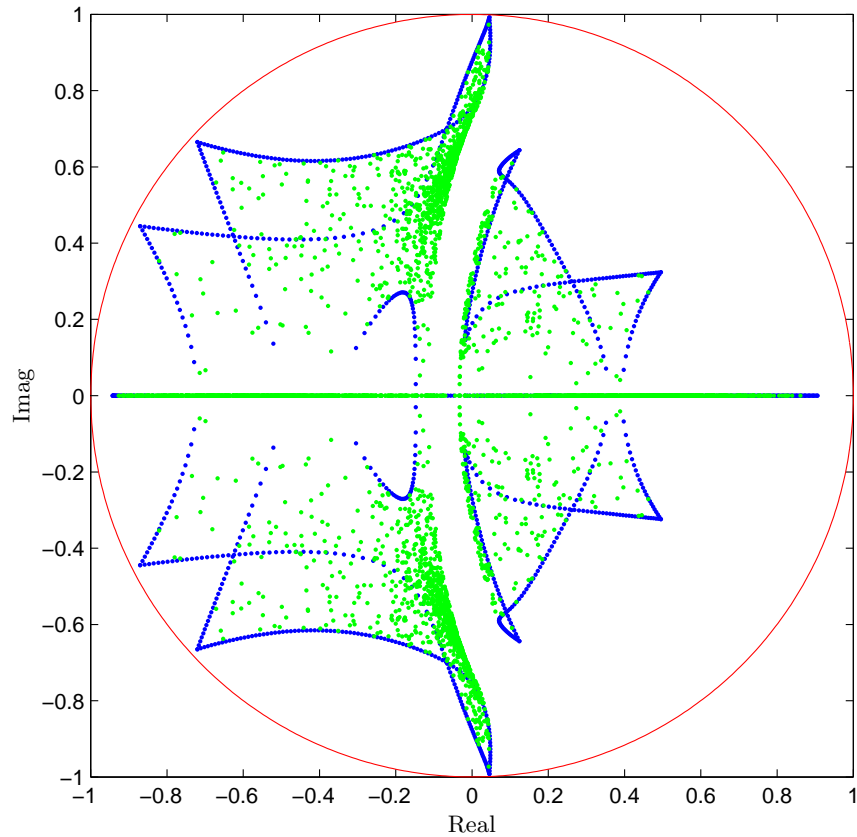


Figura 3.6: Nuvem de zeros do politopo de matrizes polinomiais descritas pelos vértices (3.33)-(3.35), (caso discreto no tempo), identificado como estável apenas pelo Teorema 3.1.

Exemplo 3.4 Finalmente, considere-se o politopo de matrizes polinomiais descrito pelas matrizes a seguir. Este politopo de polinômios matriciais foi identificado como robustamente \mathcal{D} -estável com relação ao círculo unitário centrado na origem do plano complexo (caso discreto no tempo) apenas pelo Teorema 3.1. Os demais testes nada concluíram. Na Figura 3.7, é apresentada a localização dos zeros desse politopo.

$$A_1(s) = \begin{bmatrix} s^2 - 0.95s + 0.25 & -0.60s + 0.93 \\ 0.25s - 0.84 & s^2 + 0.27s + 0.14 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

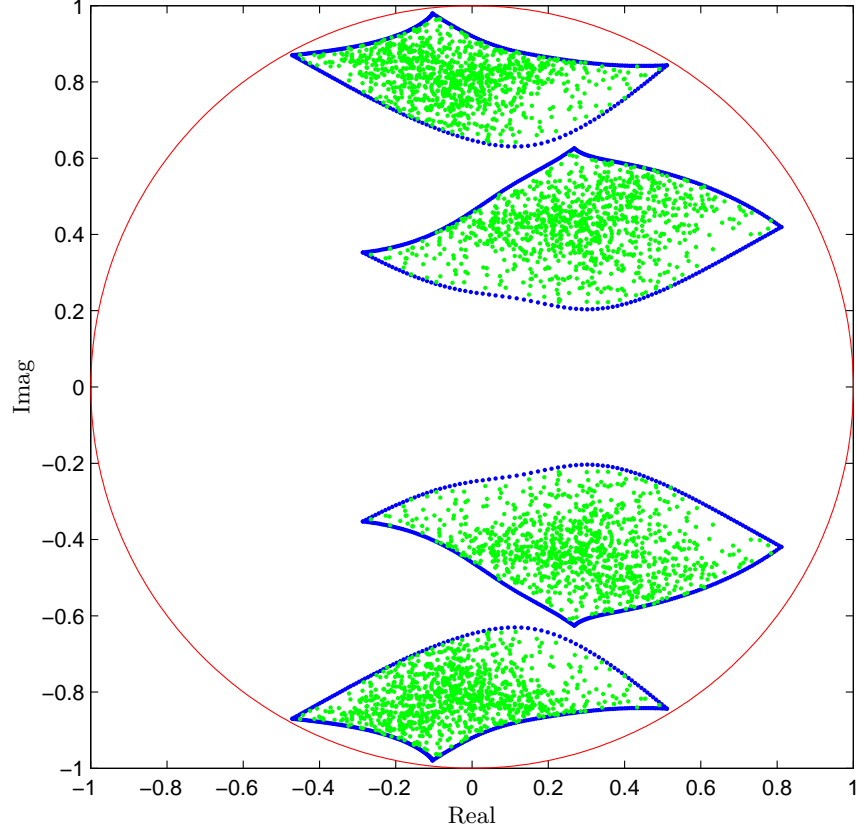


Figura 3.7: Nuvem de zeros para o politopo de matrizes polinomiais descritas pelos vértices (3.36)-(3.38) (caso discreto no tempo) identificado como estável apenas pelo Teorema 3.1.

$$A_2(s) = \begin{bmatrix} s^2 - 0.26s + 0.11 & -0.67s - 0.47 \\ 0.35s + 0.38 & s^2 - 0.19s + 0.20 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$A_3(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 0.93 & -0.93s - 0.42 \\ -0.03s - 0.14 & s^2 - 0.33s + 0.42 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

3.5 Conclusões

Neste capítulo, foram apresentadas condições suficientes para análise de \mathcal{D} -estabilidade de politopos de matrizes polinomiais que se mostraram menos conservadoras que as existentes na literatura. Essas condições, de dimensão finita em α , são suficientes para a verificação de uma condição mais geral porém de dimensão infinita em α . A \mathcal{D} -estabilidade robusta do politopo é verificada por meio de um teste de factibilidade de LMIs descritas apenas em função dos vértices do politopo, que pode ser realizado de maneira eficiente por métodos numéricos de complexidade polinomial. Uma avaliação numérica das condições propostas foi feita, evidenciando-se a superioridade dos resultados obtidos aqui com relação aos apresentados em [dOP02]. A recuperação do caso de \mathcal{D} -estabilidade robusta apresentado no Capítulo 2 foi obtida a partir das condições do Teorema 3.1 como um caso particular, isto é, para o caso de polinômios matriciais incertos de primeira ordem. Exemplos ilustrativos da abrangência das condições propostas foram dados.

Parte II

Sistemas com atraso nos estados

A estabilidade robusta de sistemas incertos contínuos ou discretos no tempo com atraso nos estados é o objeto de estudo desta segunda parte do trabalho. Nos dois casos, são utilizados funcionais de Lyapunov-Krasovskii dependentes de parâmetro, o que leva a resultados menos conservadores que os normalmente encontrados na literatura (em geral baseados na estabilidade quadrática, isto é, matrizes de Lyapunov-Krasovskii independentes do parâmetro de incerteza). No Capítulo 4, são estudados os sistemas lineares incertos neutrais, para os quais condições LMI para a análise de estabilidade robusta são fornecidas. São admitidas incertezas em todas as matrizes do sistema neutro e, além disso, admite-se que os atrasos, variantes no tempo, sejam diferentes no estado e em sua derivada temporal. As condições obtidas são do tipo “independente do atraso”. A estabilidade robusta de sistemas incertos discretos no tempo com atraso nos estados é investigada no Capítulo 5. Devido às propriedades da formulação obtida, já conhecidas e exploradas na literatura no contexto de sistemas discretos sem atraso, novas condições para a estabilizabilidade robusta são também apresentadas. Extensões para o cálculo do custo garantido \mathcal{H}_∞ , assim como da síntese de controladores com desempenho \mathcal{H}_∞ garantido, são apresentadas na forma de problemas convexos. As condições estudadas são, como no Capítulo 4, do tipo “independente do atraso”.

Capítulo 4

Estabilidade robusta de sistemas neutrais com atrasos variantes no tempo

Condições suficientes na forma de LMIs são dadas para a análise de estabilidade de sistemas incertos do tipo neutral, nos quais o vetor de estados possui atrasos variantes no tempo. Todas as matrizes do sistema são supostas invariantes no tempo, incertas porém pertencentes a um politopo cujos vértices são conhecidos. A estabilidade robusta do sistema incerto neutral é assegurada por meio de um funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetro. Mostra-se como condições para a estabilidade robusta de sistemas incertos contínuos no tempo, com e sem atraso nos estados, podem ser recuperadas a partir das condições propostas neste capítulo. Exemplos numéricos ilustram os resultados obtidos.

4.1 Introdução

O principal objetivo deste capítulo é obter condições convexas no formato de LMIs para o estudo da estabilidade robusta de sistemas incertos do tipo neutral, ou seja, para a classe de sistemas cuja dinâmica depende da derivada dos estados passados. Essa classe de sistemas é descrita por equações diferenciais hiperbólicas [Hal77], cuja formalização contém as equações diferenciais ordinárias normalmente utilizadas no contexto da teoria de controle. Linhas de transmissão [BGR99], modelos de circuitos equivalentes com elementos parciais (PEEC, do inglês *Partial Element Equivalent Circuit*) [CRZ00], [YH04], utilizados na modelagem de sistemas eletrônicos complexos, circuitos que operam em alta frequência, problemas de propagação de ondas eletromagnéticas tridimensionais em circuitos e alguns processos dinâmicos, tais como tubulações de vapor ou fluido, são exemplos de sistemas físicos que podem ser modelados por meio de equações diferenciais hiperbólicas com condições iniciais adequadas e derivadas como condições de contorno. Detalhes sobre esses (e outros) sistemas neutrais podem ser encontrados em [Hal77], [Nic01], [CRZ00] e [BGR99].

Dentre diversos trabalhos tratando dessa classe de sistemas, pode-se citar [Nic01] em que são formuladas tanto condições dependentes do atraso quanto condições independentes do atraso para sistemas conhecidos e invariantes no tempo. Condições dependentes do atraso também são dadas em [BRT03] para esse mesmo tipo de sistema (conhecido e invariante no tempo). Sistemas variantes no tempo e com atrasos também variantes no tempo são tratados em [Ver99], por meio de condições independentes do atraso, formuladas em termos de equações algébricas de Riccati. Incertezas do tipo limitada em norma

são consideradas em [XLYV03] para sistemas invariantes no tempo e atraso fixo. Em [Bli02], condições suficientes independentes do atraso, que tendem à necessidade à medida que a complexidade das inequações matriciais é aumentada, são propostas. No sistema neutro

$$\dot{x}(t) - E\dot{x}(t - \tau) = A(\alpha)x(t) + A_h(\alpha)x(t - h),$$

investigado em [Bli02], assume-se a matriz E precisamente conhecida, os atrasos τ e h invariantes no tempo e matrizes dinâmicas $A(\alpha)$ e $A_h(\alpha)$ pertencentes a um politopo de vértices conhecidos. Uma abordagem que utiliza a teoria de sistemas descritores foi introduzida em [Fri01]. Nesse trabalho, nenhum tipo de incerteza é admitida no sistema, que é considerado invariante no tempo. Outros resultados relevantes incluem [Par03], [CH04], [Che03], [PKW04], [Che04], [Fu04], [PW00], [Par01], [Han02], [Han04], [IND⁺03]. No entanto, a maior parte desses trabalhos considera apenas atrasos invariantes no tempo e, via de regra, assume que o mesmo atraso afeta o estado e sua derivada, isto é, $h = \tau$. Além disso, em geral, a estabilidade quadrática está na base dos resultados. Essas hipóteses restritivas são eliminadas nos resultados apresentados neste capítulo. No contexto de sistemas com atraso ($E = \mathbf{0}$), é importante citar [ZKT01], em que é demonstrada, por meio do uso do lema do ganho pequeno com matrizes constantes de escalonamento, a equivalência de várias condições formuladas por meio de funcionais de Lyapunov-Krasovskii e a análise de estabilidade robusta de um sistema de comparação livre de atrasos. Não são, no entanto, admitidas incertezas no sistema original e o atraso é assumido constante. Em [KR03] é tratada a estabilidade de sistemas lineares com matrizes conhecidas e atrasos variantes no tempo. Nesse último, é utilizada uma formulação baseada em restrições de integrais quadráticas (IQC, do inglês *integral quadratic constraints*). Note-se ainda que, conforme argumentado em [KR03], no contexto de sistemas com atraso ($E = \mathbf{0}$), quando o atraso é variante no tempo, a obtenção de condições para a análise de estabilidade torna-se mais elaborada.

A abordagem da estabilidade quadrática [Bar85] é freqüentemente utilizada para tratar a presença de incertezas, porém apresenta muitas vezes um elevado grau de conservadorismo. Em particular, a primeira parte deste trabalho, capítulos 2 e 3, ilustra bem como condições baseadas na estabilidade quadrática podem ser conservadoras. Assim, condições menos conservadoras têm sido obtidas por meio do uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetro no contexto da estabilidade robusta de sistemas lineares incertos [dOBG99], [LP03a], [PABB00], [RP01a], [RP02]. Neste capítulo, funcionais dependentes de parâmetro são utilizados para o estudo da análise de estabilidade robusta de sistemas neutrais incertos com atrasos variantes no tempo. Diferentemente da maioria dos trabalhos que tratam desse assunto, valores distintos de atraso de tempo são considerados nos estados atrasados e em suas derivadas. Além disso, nenhuma transformação de modelo, que normalmente introduz novas dinâmicas no modelo construído, conforme discutido em [GN01], é utilizada e todas as matrizes de sistema podem ser afetadas por incertezas do tipo politópica com vértices conhecidos. Condições suficientes na forma de LMIs são propostas para a existência de um funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetro, assegurando a estabilidade robusta do sistema neutro incerto, independentemente dos valores dos atrasos variantes no tempo. Embora apresentadas para o caso de atrasos simples, as condições podem ser facilmente estendidas para o caso de múltiplos atrasos. É mostrado que a formulação apresentada neste capítulo contém outros resultados da literatura, tais como a estabilidade robusta de sistemas lineares incertos livres de atrasos e a estabilidade robusta de sistemas incertos com atrasos, como casos especiais. Exemplos numéricos ilustram a efetividade dos resultados.

4.2 Preliminares

Considere-se a seguinte classe de sistemas incertos neutrais

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta(x_\tau) = A(\alpha)x(t) + A_h(\alpha)x(t - h(t)) \quad (4.1)$$

$$\Delta(x_\tau) \triangleq x(t) - E(\alpha)x(t - \tau(t)) \quad (4.2)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados e $h(t) \in \mathbb{R}_+$ e $\tau(t) \in \mathbb{R}_+$ são atrasos variantes no tempo. As matrizes invariantes no tempo $E(\alpha)$, $A(\alpha)$ e $A_h(\alpha)$ não são precisamente conhecidas, mas pertencem a um domínio politópico \mathcal{P} com vértices conhecidos E_j , A_j , A_{hj} — ou $(E, A, A_h)_j$ — dado por

$$\mathcal{P} = \left\{ (E, A, A_h)(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times 3n} : (E, A, A_h)(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j (E, A, A_h)_j ; \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 ; \alpha_j \geq 0 \right\} \quad (4.3)$$

Portanto, qualquer tripla $(E, A, A_h)(\alpha)$ em \mathcal{P} pode ser escrita como uma combinação convexa dos vértices $(E, A, A_h)_j$ do politopo de incertezas, em termos de α , $\alpha_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$.

As condições iniciais que asseguram a existência e unicidade de soluções para (4.1)-(4.2) envolvem

$$x(t_0 + \xi) = \phi(\xi), \forall \xi \in [-\varsigma, 0], (t_0, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_\varsigma^v \quad (4.4)$$

$$\varsigma \triangleq \max\{h(t), \tau(t)\}, h(t) \geq 0, \tau(t) \geq 0, \forall t, \quad (4.5)$$

e a estabilidade Schur-Cohn do operador $\Delta(\cdot)$ definido em (4.2). No caso de $\tau(t)$ ser invariante no tempo, isto é, $\tau(t) = \tau$, então $\Delta(\cdot)$ é Schur-Cohn estável se

$$\rho(E(\alpha)) < 1, \quad \forall \alpha \text{ admissível.} \quad (4.6)$$

No entanto, no caso mais geral em que $\tau(t)$ é variante no tempo, as condições que asseguram a estabilidade Schur-Cohn de $\Delta(\cdot)$ não são bem estabelecidas na literatura. Uma discussão sobre equações diferenciais com atrasos variantes no tempo e suas condições iniciais pode ser encontrada em [El'66]. Portanto, ao longo deste capítulo é assumido operador $\Delta(\cdot)$ seja Schur-Cohn estável, mesmo que as condições que assegurem essa propriedade não sejam precisamente conhecidas.

Neste trabalho, as seguintes definições são adotadas:

Definição 4.1 *É chamado sistema linear incerto neutral todo aquele que pode ser modelado conforme (4.1), com $E(\alpha) \neq \mathbf{0}$ para todo α admissível.*

Definição 4.2 *É chamado sistema linear incerto com atraso todo aquele que pode ser modelado conforme (4.1), com $E(\alpha) = \mathbf{0}$ para todo α admissível e $A_h \neq \mathbf{0}$ para algum α .*

Neste capítulo, o seguinte problema é investigado:

Problema 4.1 *Determinar, se possível, condições que assegurem a estabilidade robusta para o sistema linear incerto neutral (4.1)-(4.3), independentemente dos valores dos atrasos variantes no tempo $h(t)$ e $\tau(t)$.*

Condições suficientes para resolver o Problema 4.1 são dadas em termos de LMIs. Para isso, um funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetro é usado, proporcionando condições convexas do tipo “independente do atraso”, que são menos conservadoras que outras similares obtidas por meio da abordagem de estabilidade quadrática (isto é, utilizando matrizes de Lyapunov-Krasovskii constantes e independentes de parâmetro).

4.3 Estabilidade robusta independente do atraso

Inicialmente, uma LMI de dimensão infinita em α é dada como solução do Problema 4.1. A partir dessa condição, uma outra é proposta, suficiente para que a primeira seja verificada, desta vez definida em um número finito de LMIs. Para isso, algumas variáveis matriciais são escolhidas como independentes do parâmetro α .

O seguinte lema, oriundo da teoria de estabilidade de Lyapunov, é usado para a obtenção dos resultados deste capítulo.

Lema 4.1 *O sistema linear incerto neutral (4.1)-(4.3) é robustamente estável, independentemente dos valores dos atrasos variantes no tempo $h(t)$ e $\tau(t)$, se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $S_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que*

$$V(\alpha, x(t), h(t), \tau(t)) = V_1(\alpha, \Delta(x_\tau)) + V_2(\alpha, x(t), h(t)) + V_3(\alpha, x(t), \tau(t)) > 0, \quad (4.7)$$

em que

$$V_1(\alpha, \Delta(x_\tau)) \triangleq \Delta(x_\tau)' P(\alpha) \Delta(x_\tau) \quad (4.8)$$

$$V_2(\alpha, x(t), h(t)) \triangleq \int_{t-h(t)}^t x(\sigma)' S_1(\alpha) x(\sigma) d\sigma \quad (4.9)$$

$$V_3(\alpha, x(t), \tau(t)) \triangleq \int_{t-\tau(t)}^t x(\varepsilon)' S_2(\alpha) x(\varepsilon) d\varepsilon \quad (4.10)$$

para todo $\chi(t) \neq \mathbf{0}$,

$$\chi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h(t)) \\ x(t-\tau(t)) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} V(\alpha, x(t), h(t), \tau(t)) < 0. \quad (4.12)$$

Uma observação importante a respeito do Lema 4.1 é que esse lema não proporciona um método para a obtenção das matrizes $P(\alpha)$, $S_1(\alpha)$ e $S_2(\alpha)$. Note-se ainda que a equação (4.12) é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} V(\alpha, x(t), h(t), \tau(t)) &= \dot{\Delta}(x_\tau)' P(\alpha) \Delta(x_\tau) + \Delta(x_\tau)' P(\alpha) \dot{\Delta}(x_\tau) \\ &\quad - (1 - \dot{h}(t)) x(t-h(t))' S_1(\alpha) x(t-h(t)) - (1 - \dot{\tau}(t)) x(t-\tau(t))' S_2(\alpha) x(t-\tau(t)) \\ &\quad + x(t)' (S_1(\alpha) + S_2(\alpha)) x(t) < \mathbf{0}, \end{aligned}$$

em que nenhum majorante sobre as taxas de variação dos atrasos é imposto. Deste ponto em diante, os seguintes limites são assumidos para as taxas de variação dos atrasos, como forma de obter condições

suficientes para a verificação do Lema 4.1 e, portanto, fornecer uma solução para o Problema 4.1. Assim, suponha-se que

$$|\dot{h}(t)| \leq \bar{h} < 1 \quad (4.13)$$

$$|\dot{\tau}(t)| \leq \bar{\tau} < 1 \quad (4.14)$$

e defina-se os seguintes escalares

$$\beta_{\bar{h}} \triangleq (1 - \bar{h}) \quad ; \quad \beta_{\bar{\tau}} \triangleq (1 - \bar{\tau}) \quad (4.15)$$

Com essas definições, é possível estabelecer os principais resultados deste capítulo. A condição seguinte é convexa nas variáveis de otimização e de dimensão infinita em α .

Teorema 4.1 *As condições equivalentes seguintes garantem a estabilidade robusta, independentemente dos atrasos variantes no tempo do sistema linear incerto neutral (4.1)-(4.3), sujeitos a (4.13)-(4.14), e são suficientes para a verificação do Lema 4.1, assegurando, portanto, uma solução para o Problema 4.1:*

i) *Existem matrizes simétricas definidas positivas $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que*

$$\Theta(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) + S_1(\alpha) + S_2(\alpha) & P(\alpha)A_h(\alpha) & -A(\alpha)'P(\alpha)E(\alpha) \\ \star & -\beta_{\bar{h}}S_1(\alpha) & -A_h(\alpha)'P(\alpha)E(\alpha) \\ \star & \star & -\beta_{\bar{\tau}}S_2(\alpha) \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (4.16)$$

ii) *Existem matrizes simétricas definidas positivas $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $F_1(\alpha)$, $F_2(\alpha)$, $G_1(\alpha)$, $G_2(\alpha)$, $H_1(\alpha)$, $H_2(\alpha)$, $M_1(\alpha)$, $M_2(\alpha)$, $N_1(\alpha)$ e $N_2(\alpha)$ pertencentes a $\mathbb{R}^{n \times n}$, tais que*

$$\Xi(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} F_1(\alpha) + F_1(\alpha)' & P(\alpha) + F_2(\alpha) + G_1(\alpha)' & H_1(\alpha)' - (F_1(\alpha)A(\alpha) + F_2(\alpha)) \\ \star & G_2(\alpha) + G_2(\alpha)' & H_2(\alpha)' - (G_1(\alpha)A(\alpha) + G_2(\alpha)) \\ \star & \star & S_1(\alpha) + S_2(\alpha) - (H_1(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)'H_1(\alpha)' + H_2(\alpha) + H_2(\alpha)') \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ M_1(\alpha)' - F_1(\alpha)A_h(\alpha) & N_1(\alpha)' + F_2(\alpha)E(\alpha) \\ M_2(\alpha)' - G_1(\alpha)A_h(\alpha) & N_2(\alpha)' + G_2(\alpha)E(\alpha) \\ -(H_1(\alpha)A_h(\alpha) & H_2(\alpha)E(\alpha) - (A(\alpha)'N_1(\alpha)' + N_2(\alpha)') \\ + A(\alpha)'M_1(\alpha)' + M_2(\alpha)') & \\ -\beta_{\bar{h}}S_1(\alpha) + M_1(\alpha)A_h(\alpha) & M_2(\alpha)E(\alpha) - A_h(\alpha)'N_1(\alpha)' \\ + A_h(\alpha)'M_1(\alpha)' & \\ \star & -\beta_{\bar{\tau}}S_2(\alpha) + N_2(\alpha)E(\alpha) + E(\alpha)'N_2(\alpha)' \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (4.17)$$

Prova: O fato de que i) é uma condição suficiente para resolver o Problema 4.1 vem diretamente do Lema 4.1. Avaliando a derivada temporal de $V(\cdot)$, com $\Delta(x_\tau)$ dado em (4.2), obtém-se $\chi(t)'\tilde{\Theta}(\alpha, t)\chi(t)$, com $\chi(t)$ dado em (4.11) e

$$\tilde{\Theta}(\alpha, t) \triangleq \begin{bmatrix} A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) + S_1(\alpha) + S_2(\alpha) & P(\alpha)A_h(\alpha) & -A(\alpha)'P(\alpha)E(\alpha) \\ \star & -\beta_{\bar{h}}S_1(\alpha) & -A_h(\alpha)'P(\alpha)E(\alpha) \\ \star & \star & -\beta_{\bar{\tau}}S_2(\alpha) \end{bmatrix}$$

com $\beta_{\bar{h}} \triangleq (1 - \dot{h}(t))$, $\beta_{\bar{\tau}} \triangleq (1 - \dot{\tau}(t))$. Usando (4.13)-(4.14) e (4.16), é possível obter

$$\tilde{\Theta}(\alpha, t) \leq \Theta(\alpha) < \mathbf{0}$$

assegurando-se, portanto, as condições do Lema 4.1. O fato de que $ii) \Rightarrow i)$ pode ser obtido por meio da transformação de congruência $\Theta(\alpha) = \mathcal{U}'\Xi(\alpha)\mathcal{U}$, em que

$$\mathcal{U} \triangleq \begin{bmatrix} A(\alpha) & A_h(\alpha) & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & -E(\alpha) \\ & \mathbf{I}_{3n} & \end{bmatrix}$$

e, finalmente, $ii) \Leftarrow i)$ pode ser provado, utilizando o Lema de Finsler [dOS01]. ■

As condições apresentadas no Teorema 4.1 não dependem dos valores de $\tau(t)$ e $h(t)$, mas apenas de suas taxas de variação máximas, respectivamente $\bar{\tau}$ e \bar{h} . Além disso, o Teorema 4.1 poderia ser usado para verificar a estabilidade robusta de um sistema neutro pertencente a qualquer domínio de incertezas parametrizado em α , ao preço de ser necessário testar todos os possíveis valores de α do domínio correspondente. Um teste numericamente eficiente, definido por um número finito de LMIs, que garante as condições do Lema 4.1, pode ser obtido impondo-se a seguinte estrutura às matrizes simétricas $P(\alpha)$, $S_1(\alpha)$ e $S_2(\alpha)$

$$P(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j P_j; \quad S_1(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j S_{1j}; \quad S_2(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j S_{2j}; \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1, \quad \alpha_j \geq 0 \quad (4.18)$$

e escolhendo as matrizes extras de forma independente do parâmetro α , isto é $F_1(\alpha) = F_1$, $F_2(\alpha) = F_2$, $G_1(\alpha) = G_1$, $G_2(\alpha) = G_2$, $H_1(\alpha) = H_1$, $H_2(\alpha) = H_2$, $M_1(\alpha) = M_1$, $M_2(\alpha) = M_2$, $N_1(\alpha) = N_1$ e $N_2(\alpha) = N_2$.

Teorema 4.2 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_{1j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_{2j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$ e matrizes $F_1, F_2, G_1, G_2, H_1, H_2, M_1, M_2, N_1$ e N_2 pertencentes a $\mathbb{R}^{n \times n}$, tais que*

$$\Xi_j \triangleq \begin{bmatrix} F_1 + F_1' & P_j + F_2 + G_1' & H_1' - (F_1 A_j + F_2) & M_1' - F_1 A_{hj} & N_1' + F_2 E_j \\ * & G_2 + G_2' & H_2' - (G_1 A_j + G_2) & M_2' - G_1 A_{hj} & N_2' + G_2 E_j \\ * & * & S_{1j} + S_{2j} - (H_1 A_j + A_j' H_1' + H_2 + H_2') & -(H_1 A_{hj} + A_j' M_1' + M_2') & H_2 E_j \\ * & * & * & -\beta_{\bar{h}} S_{1j} + M_1 A_{hj} + A_{hj}' M_1' & M_2 E_j - A_{hj}' N_1' \\ * & * & * & * & -\beta_{\bar{\tau}} S_{2j} + N_2 E_j + E_j' N_2' \end{bmatrix} < \mathbf{0};$$

$j = 1, \dots, N, \quad (4.19)$

então as condições do Lema 4.1 são verificadas com $P(\alpha)$, $S_1(\alpha)$ e $S_2(\alpha)$ dadas por (4.18), assegurando, portanto, uma solução para o Problema 4.1.

Prova: Claramente, $P(\alpha)$, $S_1(\alpha)$ e $S_2(\alpha)$ dadas em (4.18) com $P_j = P_j' > \mathbf{0}$, $S_{1j} = S_{1j}' > \mathbf{0}$, $S_{2j} = S_{2j}' > \mathbf{0}$, $j = 1, \dots, N$ são matrizes definidas positivas. Multiplicando (4.19) por α_j , $\alpha_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$ e somando em $j = 1, \dots, N$, (4.17) é verificada. ■

É imediata a obtenção de uma condição baseada na estabilidade quadrática com variáveis extras a partir do Teorema 4.2. Esse resultado é apresentado no corolário que segue.

Corolário 4.1 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e matrizes $F_1, F_2, G_1, G_2, H_1, H_2, M_1, M_2, N_1$ e N_2 pertencentes a $\mathbb{R}^{n \times n}$, tais que*

$$\begin{bmatrix} F_1 + F'_1 & P + F_2 + G'_1 & H'_1 - (F_1 A_j + F_2) & M'_1 - F_1 A_{hj} & N'_1 + F_2 E_j \\ \star & G_2 + G'_2 & H'_2 - (G_1 A_j + G_2) & M'_2 - G_1 A_{hj} & N'_2 + G_2 E_j \\ \star & \star & S_1 + S_2 - (H_1 A_j + A'_j H'_1 + H_2 + H'_2) & -(H_1 A_{hj} + A'_j M'_1 + M'_2) & H_2 E_j - (A'_j N'_1 + N'_2) \\ \star & \star & \star & -\beta_{\bar{h}} S_1 + M_1 A_{hj} + A'_{hj} M'_1 & M_2 E_j - A'_{hj} N'_1 \\ \star & \star & \star & \star & -\beta_{\bar{\tau}} S_2 + N_2 E_j + E'_j N'_2 \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.20)$$

então as condições do Lema 4.1 são verificadas com $P(\alpha) = P$, $S_1(\alpha) = S_1$ e $S_2(\alpha) = S_2$, assegurando, portanto, uma solução para o Problema 4.1. Neste caso, o sistema incerto (4.1)-(4.3) é dito “quadraticamente estável”.

Note que a condição *i*) do Teorema 4.1 não pode ser diretamente transformada em uma condição de dimensão finita em α como feito com a condição *ii*) desse teorema. O principal obstáculo neste caso é a ocorrência do produto triplo nos blocos (1, 3) e (2, 3) (e correspondentes simétricos) de (4.16). Por essa razão, várias condições convexas encontradas na literatura exigem que a matriz $E(\alpha)$ seja precisamente conhecida, isto é, $E(\alpha) = E$, $\forall \alpha$ (veja-se, por exemplo, [Bli02]). No caso de $E(\alpha) = E$, pode-se obter uma condição de estabilidade quadrática para o sistema neutral com matrizes $A(\alpha)$ e $A_h(\alpha)$ incertas e atrasos $h(t)$ e $\tau(t)$ variantes no tempo e sujeitos a (4.13)-(4.14), conforme apresentado no seguinte corolário.

Corolário 4.2 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $S_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que*

$$\begin{bmatrix} A'_j P + P A_j + S_1 + S_2 & P A_{hj} & -A'_j P E \\ \star & -\beta_{\bar{h}} S_1 & -A_{hj} P E \\ \star & \star & -\beta_{\bar{\tau}} S_2 \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.21)$$

então as condições do Lema 4.1 são verificadas com $P(\alpha) = P$, $S_1(\alpha) = S_1$ e $S_2(\alpha) = S_2$, garantindo que o sistema (4.1)-(4.3), com $E_j = E$, $j = 1, \dots, N$ e atrasos sujeitos a (4.13) e (4.14), é quadraticamente estável.

O produto de matrizes que são funções do parâmetro α pode ser tratado, utilizando-se a técnica apresentada nos capítulos 2 e 3. Veja-se [PTGL03] para a aplicação dessa técnica no contexto de sistemas incertos contínuos no tempo com atraso nos estados ($E = \mathbf{0}$), isto é, para $\beta_{\bar{h}} = 1$ (atraso invariante no tempo) em (4.16).

4.4 Casos particulares

Alguns casos degenerados da equação diferencial hiperbólica dada em (4.1) são de interesse teórico e prático. Esses casos podem ser resumidos nas seguintes situações:

1. Matriz $A_h(\alpha) = \mathbf{0}$, $\forall \alpha$, implicando que o sistema (4.1) é descrito por

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta(x_\tau) = A(\alpha)x(t) \quad (4.22)$$

2. Matriz $E(\alpha) = \mathbf{0}$, $\forall \alpha$, o que faz o sistema (4.1) deixar de ser do tipo neutral, descrito por uma equação diferencial hiperbólica, e recuperar o caso, mais conhecido, de um sistema incerto com atraso nos estados, dado por

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + A_h(\alpha)x(t - h(t)) \quad (4.23)$$

Nesse caso, o operador $\Delta(\cdot)$ em (4.2) é simplesmente $\Delta(x_\tau) = x(t)$, pois, sem perda de generalidade, assume-se $\tau(t) = 0$, $\forall t$.

3. As matrizes $E(\alpha)$ e $A_h(\alpha)$ são ambas nulas, $\forall \alpha$, recuperando o caso clássico de um sistema linear incerto contínuo no tempo e livre de atrasos dado por

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) \quad (4.24)$$

Nessas três situações, condições de menor complexidade, em relação às já apresentadas neste capítulo, podem ser obtidas a partir das condições apresentadas nos teoremas 4.1 e 4.2 para a análise de estabilidade robusta de (4.22)-(4.24). Esse fato decorre de simplificações no funcional de Lyapunov-Krasovskii comumente empregado em cada uma dessas situações, conforme discutido a seguir. É bom lembrar-se que em (4.22)-(4.24) as matrizes dinâmicas pertencem ao politopo \mathcal{P} dado em (4.3).

Note-se que para o caso em que $A_h(\alpha) = \mathbf{0}$, $\forall \alpha$, o funcional (4.7)-(4.10) pode ser simplificado impondo $S_1(\alpha) = \mathbf{0}$, resultando em

$$V(\alpha, x(t), h(t), \tau(t)) = V(\alpha, x(t), \tau(t)) = V_1(\alpha, \Delta(x_\tau)) + V_3(\alpha, x(t), \tau(t)) > 0 \quad (4.25)$$

e, no caso em que apenas $E(\alpha) = \mathbf{0}$, $\forall \alpha$, toma-se $S_2(\alpha) = \mathbf{0}$, levando o funcional (4.7) à forma

$$V(\alpha, x(t), h(t), \tau(t)) = V_1(\alpha, \Delta(x_\tau)) + V_2(\alpha, x(t), h(t)) > 0, \quad (4.26)$$

que é equivalente a

$$V(\alpha, x(t), h(t), \tau(t)) = V(\alpha, x(t), h(t)) = x(t)'P(\alpha)x(t) + V_2(x(t), h(t)) > 0 \quad (4.27)$$

Na terceira situação, em que $A_h(\alpha) = \mathbf{0}$ e $E(\alpha) = \mathbf{0}$, $\forall \alpha$, o funcional em estudo fica reduzido ao funcional padrão de Lyapunov, sendo dado por

$$V(\alpha, x(t), h(t), \tau(t)) = V(\alpha, x(t)) = x(t)'P(\alpha)x(t) > 0 \quad (4.28)$$

Na seqüência, são apresentadas essas condições, que podem ser obtidas como casos particulares dos teoremas 4.1 e 4.2. Neste trabalho, é focalizada a obtenção de condições convexas de dimensão finita em α e por isso os corolários apresentados a seguir são determinados a partir das condições do Teorema 4.2. Um desenvolvimento análogo ao apresentado a seguir pode ser feito a partir do Teorema 4.1, obtendo-se, neste caso, condições de dimensão infinita em α . É importante salientar que, embora essas condições possam ser obtidas a partir dos funcionais de Lyapunov-Krasovskii (4.25)-(4.28), seguindo passos semelhantes aos apresentados nas provas dos teoremas 4.1 e 4.2, optou-se pela obtenção dessas por meio da aplicação de transformações de congruência em (4.19).

4.4.1 Estabilidade robusta do sistema incerto neutral

A situação investigada aqui é o sistema neutral (4.1) com $A_h(\alpha) = \mathbf{0}$, $\forall \alpha$. A condição de estabilidade robusta independente do atraso para este caso pode ser obtida de (4.19), fazendo $S_{1j} = \mathbf{0}$, $j = 1, \dots, N$, e aplicando a transformação de congruência

$$T_{A_h} \Xi_j T_{A_h}' ; \quad j = 1, \dots, N \quad (4.29)$$

com Ξ_j dado em (4.19) e

$$T_{A_h} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}$$

que resulta no seguinte corolário.

Corolário 4.3 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_{2j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$ e matrizes $F_1, F_2, G_1, G_2, H_1, H_2, N_1$ e N_2 pertencentes a $\mathbb{R}^{n \times n}$, tais que*

$$\Xi_{A_h j} \triangleq \begin{bmatrix} F_1 + F_1' & P_j + F_2 + G_1' & H_1' - (F_1 A_j + F_2) & N_1' + F_2 E_j \\ \star & G_2 + G_2' & H_2' - (G_1 A_j + G_2) & N_2' + G_2 E_j \\ \star & \star & S_{2j} - (H_1 A_j + A_j' H_1' + H_2 + H_2') & H_2 E_j - (A_j' N_1' + N_2') \\ \star & \star & \star & -\beta_{\tau} S_{2j} + N_2 E_j + E_j' N_2' \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.30)$$

então $P(\alpha)$ e $S_2(\alpha)$ dadas em (4.18) asseguram (4.25) e (4.12), garantindo a estabilidade robusta de (4.22) com $\tau(t)$ sujeito a (4.14), independentemente do valor do atraso $\tau(t)$.

4.4.2 Estabilidade robusta do sistema incerto com atraso nos estados

Neste caso, é considerado $E(\alpha) = \mathbf{0}$, $\forall \alpha$ em (4.1), implicando que a característica “neutral” do sistema é perdida, passando este a ser descrito como em (4.23), com $h(t)$ sujeito a (4.13). Fazendo $S_{2j} = \mathbf{0}$, $j = 1, \dots, N$, em (4.19) e aplicando a transformação de congruência

$$\Xi_{Ej} = T_E \Xi_j T_E'; \quad j = 1, \dots, N \quad (4.31)$$

com Ξ_j dado em (4.19) e

$$T_E = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

pode-se estabelecer o seguinte corolário.

Corolário 4.4 *Se existirem matrizes positivas definidas $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $S_{1j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$, matrizes $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que*

$$\Xi_{Ej} \triangleq \begin{bmatrix} F + F' & P_j + G' - F A_j & M' - F A_{hj} \\ \star & S_{1j} - G A_j - A_j' G' & -G A_{hj} - A_j' M' \\ \star & \star & -\beta_{\bar{h}} S_{1j} - M A_{hj} - A_{hj}' M' \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.32)$$

então $P(\alpha)$ e $S_1(\alpha)$ dadas em (4.18) asseguram (4.27) e (4.12), garantindo a estabilidade robusta de (4.23) com $h(t)$ sujeito a (4.13), independentemente do valor do atraso $h(t)$.

No Corolário 4.4, as variáveis extras F , G e M estão relacionadas às do Teorema 4.2 da seguinte forma:

$$F = F_1; \quad G = G_1 + H_1; \quad \text{e} \quad M = M_1$$

4.4.3 Estabilidade robusta do sistema incerto

Finalmente, considere-se o sistema linear incerto dado em (4.1) livre de atrasos, isto é, com $E(\alpha) = \mathbf{0}$ e $A_h(\alpha) = \mathbf{0}$, $\forall \alpha$. O sistema contínuo no tempo resultante, $\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t)$, é o mesmo estudado no Capítulo 2. Neste caso, a condição apresentada em [PABB00] para sistemas contínuos no tempo (e considerando a região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_C$ dada em (2.5)) pode ser recuperada a partir de (4.19) impondo $S_1(\alpha) = S_2(\alpha) = \mathbf{0}$ e considerando, portanto, o funcional dado em (4.28). Aplicando a transformação de congruência

$$T_{EA_h} \Xi_j T'_{EA_h}; \quad j = 1, \dots, N$$

com Ξ_j , $j = 1, \dots, N$, dado em (4.19) e

$$T_{EA_h} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

o seguinte corolário é obtido.

Corolário 4.5 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$, matrizes $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que*

$$\Xi_{EA_h j} \triangleq \begin{bmatrix} -(FA_j + A'_j F') & P_j + F - A'_j G \\ \star & G + G' \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.33)$$

então $P(\alpha)$ dada em (4.18) assegura (4.28) e (4.12), garantindo a estabilidade robusta do sistema livre de atrasos dado por (4.24).

No caso do Corolário 4.5, as relações entre as matrizes F e G em (4.33), as correspondentes em [PABB00] (F_{PABB} , G_{PABB}) e as matrizes extras de (4.19) são dadas por

$$G = G_{\text{PABB}} = -(G_1 + H_1); \quad F = F_{\text{PABB}} = -F_1$$

Observação 4.1 É importante salientar que todos os resultados apresentados aqui contêm, como caso particular, a estabilidade quadrática que utiliza matrizes constantes nos funcionais de Lyapunov-Krasovskii considerados. Essas condições podem ser obtidas dos resultados aqui apresentados impondo-se $P(\alpha) = P_j = P$, $S_1(\alpha) = S_{1j} = S_1$ e $S_2(\alpha) = S_{2j} = S_2$.

Observação 4.2 A extensão dos resultados apresentados neste trabalho para o caso de múltiplos atrasos é imediata.

4.5 Complexidade numérica

A complexidade numérica associada às condições LMI apresentadas neste capítulo são dadas na Tabela 4.1. LMIs podem ser resolvidas em tempo polinomial por meio de algoritmos com complexidade

Critério	\mathcal{K} (nº de variáveis)	\mathcal{L} (nº de linhas)
Teorema 4.2	$\frac{3Nn}{2}(n+1) + 10n^2$	$8Nn$
Corolário 4.1	$\frac{3Nn}{2}(n+1) + 10n^2$	$8Nn$
Corolário 4.2	$\frac{3n}{2}(n+1)$	$3Nn$
Corolário 4.3	$Nn(n+1) + 8n^2$	$6Nn$
Corolário 4.4	$Nn(n+1) + 3n^2$	$5Nn$
Corolário 4.5	$\frac{Nn}{2}(n+1) + 2n^2$	$3Nn$

Tabela 4.1: Número de variáveis escalares (\mathcal{K}) e número de linhas (\mathcal{L}) em função do número de estados (n) e vértices (N) para as condições de análise de estabilidade estudadas.

numérica proporcional a $\mathcal{K}^3\mathcal{L}$, sendo \mathcal{K} o número de variáveis escalares e \mathcal{L} o número de linhas das LMIs [GNLC95].

Uma outra abordagem, menos conservadora, para obtenção de condições convexas de dimensão finita suficientes para aquelas estabelecidas no Teorema 4.1 é utilizar as idéias já exploradas nos capítulos 2 e 3, permitindo que as variáveis extras presentes na condição *ii*) desse teorema sejam também dependentes, de forma afim, do parâmetro α . É claro que, nesse caso, as condições obtidas serão menos conservadoras que as condições do Teorema 4.2, porém com complexidade mais elevada. Como exemplo desse tipo de abordagem, no contexto de sistemas incertos contínuos no tempo com atrasos (invariantes no tempo) nos estados, veja-se [LPT03] para condições independentes do atraso com variáveis extras e [PTGL03] para condições dependentes e independentes do atraso (sem variáveis extras).

Observação 4.3 Note-se que os teoremas e corolários enunciados neste capítulo contêm o caso de atrasos invariantes no tempo. Por exemplo, se $\tau(t) = \tau$, então basta fazer $\beta_{\bar{\tau}} = 1$ nas condições LMI correspondentes.

4.6 Exemplos

Exemplo 4.1 Considere-se o sistema linear incerto neutral com dois estados pertencente a um domínio politópico definido por três vértices $V_j \equiv (E, A, A_h)_j$, $j = 1, 2, 3$, dados por

$$V_1 = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} -0.10 & 0 & -0.7085 & -0.0758 & -0.3543 & -0.0379 \\ 0 & -0.10 & -0.2511 & -0.0269 & -0.1256 & -0.0135 \end{array} \right] \quad (4.34)$$

$$V_2 = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} -0.15 & 0 & -0.3260 & 0.2616 & -0.1630 & 0.1308 \\ 0 & -0.15 & 0.2980 & -0.2393 & 0.1490 & -0.1196 \end{array} \right] \quad (4.35)$$

$$V_3 = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} -0.20 & 0 & -0.3957 & 0.3236 & -0.1978 & 0.1618 \\ 0 & -0.20 & 0.3513 & -0.2874 & 0.1756 & -0.1437 \end{array} \right] \quad (4.36)$$

Suponha-se que, neste caso, o operador $\Delta(\cdot)$ seja estável no sentido Schur-Cohn. Conforme discutido anteriormente, as condições que asseguram essa propriedade não são bem determinadas na literatura.

Usando os resultados do Teorema 4.2, é possível caracterizar a região $(\bar{h}, \bar{\tau})$ na qual este sistema é robustamente estável independentemente dos valores dos atrasos $h(t)$ e $\tau(t)$, como mostrado na Figura 4.1, em que foi usada uma malha de 0.02 nos eixos $\bar{\tau}$ e \bar{h} . Salienta-se que esse sistema não pode ser caracterizado como quadraticamente estável, isto é, as condições do Teorema 4.2 não são factíveis quando é imposto $P_j = P$, $S_{1j} = S_1$ e $S_{2j} = S_2$, $j = 1, \dots, N$.

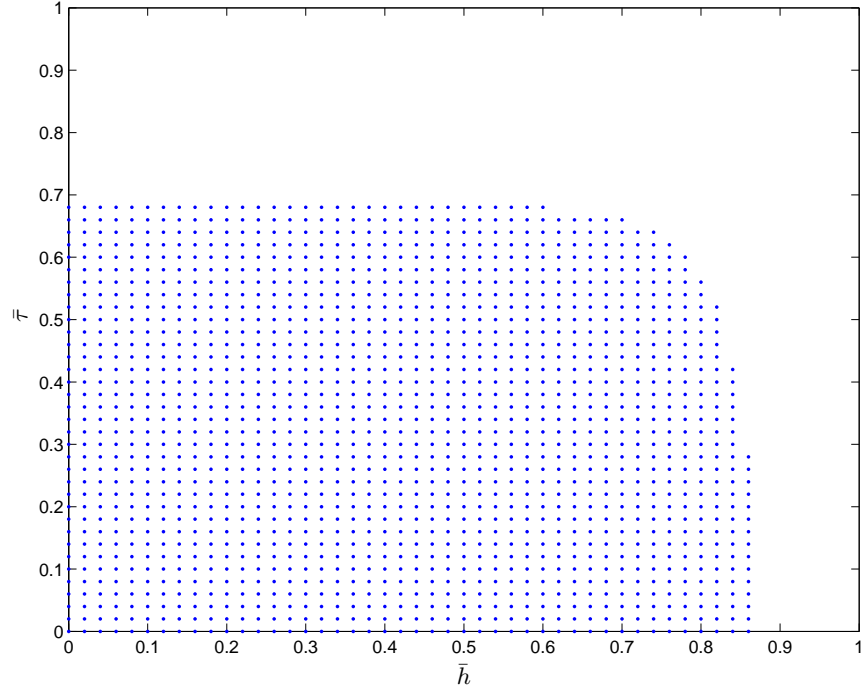


Figura 4.1: Região $(\bar{h}, \bar{\tau})$ na qual é verificada a estabilidade robusta do sistema linear incerto neutro dado por (4.34)-(4.36), obtida por meio das condições do Teorema 4.2.

Exemplo 4.2 Considere o sistema linear incerto com atraso nos estados, cuja equação dinâmica é dada em (4.23), com $A(\alpha)$ e $A_h(\alpha)$ pertencentes ao politopo determinado pelos vértices $V_1 = [A_1, A_{h1}]$, $V_2 = [A_2, A_{h2}]$ e $V_3 = [A_3, A_{h3}]$ dados por

$$V_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} -0.8550 & 0.4346 & -0.4275 & 0.2173 \\ 0.5832 & -0.2965 & 0.2916 & -0.1482 \end{array} \right]$$

$$V_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} -0.8080 & 0.1023 & -0.4040 & 0.0511 \\ 0.5095 & -0.0646 & 0.2548 & -0.0323 \end{array} \right]$$

$$V_3 = \left[\begin{array}{cc|cc} -0.9438 & -0.0786 & -0.4719 & -0.0393 \\ 0.5716 & 0.0476 & 0.2858 & 0.0238 \end{array} \right]$$

Esse sistema não é quadraticamente estável (independentemente do valor do atraso $h(t)$). Utilizando-se as condições LMI estabelecidas no Teorema 4.2, com $E_j = \mathbf{0}$ e $\beta_{\bar{\tau}} = 1$, é verificado que esse sistema é robustamente estável independentemente do atraso $h(t)$ para $|\dot{h}(t)| \leq \bar{h} = 0.9999$. Por outro lado,

utilizando as condições estabelecidas no Corolário 4.4 o limite encontrado para a taxa de variação do atraso foi $|\dot{h}(t)| \leq \bar{h} = 0.4047$. Esse valor indica um maior conservadorismo nos resultados obtidos por meio do Corolário 4.4 em relação à condição fornecida pelo Teorema 4.2. O melhor desempenho do Teorema 4.2 deve-se ao uso de um funcional de Lyapunov-Krasovskii, equação (4.7), mais completo que o considerado no Corolário 4.4, equação (4.27).

4.7 Conclusões

Condições LMI independentes do atraso, suficientes para a análise de estabilidade robusta de sistemas lineares incertos neutrais, pertencentes a domínios politópicos, com atrasos variantes no tempo, foram apresentadas. Essas condições são baseadas em funcionais de Lyapunov-Krasovskii dependentes de parâmetro, o que torna as condições bem menos conservadoras que outras baseadas em matrizes fixas (estabilidade quadrática). Foi mostrado que as condições de análise de estabilidade robusta de sistemas neutrais contêm outras específicas para casos degenerados, tais como sistemas com atrasos e sistemas livres de atraso. Exemplos numéricos ilustram os resultados.

Capítulo 5

Controle robusto \mathcal{H}_∞ de sistemas discretos no tempo com atraso nos estados

Neste capítulo, sistemas incertos discretos no tempo com atraso nos estados são investigados. É assumido que as incertezas pertencem a um politopo convexo conhecido e podem afetar todas as matrizes do sistema. Condições do tipo LMI suficientes para a estabilidade robusta e para a estabilização robusta dos sistemas são dadas. Em seguida, essas condições são estendidas para o cálculo do custo garantido \mathcal{H}_∞ e para a síntese de ganho robusto de realimentação de estados, assegurando um nível pré-determinado de atenuação \mathcal{H}_∞ , levando-se em conta um termo que depende do estado e, se disponível, também um termo que depende do estado atrasado. As condições propostas aqui são do tipo “independente do atraso”, no sentido em que a robustez é assegurada independentemente do valor do atraso e, diferente de outras abordagens encontradas na literatura, são formuladas como problemas de otimização convexa. Se o atraso é conhecido e os estados atrasados são disponíveis, um ganho de realimentação de estados dependente de valores passados dos estados pode ser usado para melhorar o desempenho do sistema em malha fechada. Conforme ilustrado por exemplos numéricos, incluindo o modelo de um forno industrial com aquecedor elétrico, as condições propostas são simples de aplicar e podem levar a resultados menos conservadores quando comparadas a algumas condições do tipo “dependente de atraso”. Alguns dos resultados apresentados neste capítulo podem ser encontrados em [LTP04b], [LTP04a] e [LTP].

5.1 Introdução

Podem ser encontradas na literatura algumas abordagens para tratar os problemas de estabilidade robusta, estabilização robusta, cálculo do custo garantido \mathcal{H}_∞ e síntese de controlador com desempenho \mathcal{H}_∞ garantido associados à classe de sistemas lineares incertos, discretos no tempo e com atraso nos estados. Em [WH94], uma condição independente do atraso suficiente para a estabilidade exponencial é apresentada para sistemas precisamente conhecidos. Em [CC03], condições algébricas para a estabilidade robusta de sistemas singulares discretos com incertezas paramétricas estruturadas foram propostas. O raio de estabilidade real de sistemas invariantes no tempo com perturbações limitadas em norma e atraso nos estados foi considerado em [HD03]. Em [KP90], uma técnica do tipo LQG (do inglês *Linear Quadratic*

Gaussian) foi apresentada para sistemas com atraso precisamente conhecidos. Usando o conceito de estabilidade quadrática [Bar85], condições suficientes para a análise de estabilidade independente do atraso de sistemas incertos (com atraso) foram apresentadas em diversos trabalhos, alguns também propondo uma extensão para o caso de síntese de controlador. Seguindo essa metodologia, sistemas com incertezas do tipo limitada em norma e com atrasos invariantes no tempo foram considerados em [SBSA03]. Esse trabalho inclui uma função de custo quadrático, resultando em condições não-convexas para o caso de síntese de controlador.

Em [MX00], uma abordagem por controle ótimo é apresentada, considerando apenas atrasos fixos e com formulação baseada em equações acopladas de Riccati, que dependem de variáveis escalares para serem resolvidas. Uma abordagem utilizando a estabilidade quadrática é proposta em [XLY01], também para atrasos invariantes no tempo. Nesse trabalho, condições não-lineares, necessárias e suficientes para a estabilidade e para a estabilização quadrática são apresentadas para sistemas com perturbações do tipo limitada em norma, presentes apenas na matriz dinâmica. Em [ZWH04], são propostas condições convexas para a análise de estabilidade de sistemas precisamente conhecidos, com um termo aditivo do tipo não-linear limitado em norma. O problema de síntese de filtros para sistemas discretos no tempo com atraso nos estados é tratado em [Xu02]. Para o caso de perturbações limitadas em norma, pode ser encontrada em [WHU99] uma abordagem baseada em estabilidade quadrática e LMIs para o projeto de observadores com desempenho \mathcal{H}_∞ . Condições suficientes para a análise regional de pólos podem ser encontradas em [LHLK92]. Essas condições estão formuladas em termos de normas matriciais, mas os testes podem ser aplicados apenas em sistemas precisamente conhecidos restritos ao atraso unitário. Ainda utilizando a abordagem da estabilidade quadrática, condições não convexas em termos de equações algébricas de Riccati são propostas em [Mah00].

Em [FS03], é definido um sistema aumentado do tipo descritor, e condições para a análise de estabilidade baseada em desigualdades matriciais com multiplicadores escalares são estabelecidas.

O controle robusto \mathcal{H}_∞ para sistemas precisamente conhecidos discretos no tempo e com atraso nos estados é estudado em [KH98] por meio de equações de Riccati. Uma abordagem por desigualdade matricial (não-convexa) é proposta em [SK98] para tratar sistemas com incertezas do tipo limitada em norma. Os casos contínuo e discreto no tempo são investigados em [KP99] no contexto de controle por realimentação de estados com desempenho \mathcal{H}_∞ e condições suficientes para a síntese de ganhos de realimentação de estados que garantem um desempenho \mathcal{H}_∞ são dadas em termos de LMIs com um parâmetro de escalamento. Nesse caso, apenas perturbações do tipo limitada em norma são admitidas. Em [XC04], desigualdades matriciais não-convexas são propostas para resolver o problema do controle robusto \mathcal{H}_∞ para sistemas discretos no tempo com atrasos nos estados. Nesse caso, o sistema é suposto variante no tempo e a abordagem utiliza da estabilidade quadrática para a formulação de condições de síntese.

Todos esses resultados são formulados em termos de matrizes de Lyapunov fixas e podem, em alguns casos, fornecer condições para síntese de um ganho robusto para a realimentação de estados, na maioria das vezes por meio de condições não-convexas. Extensões dessas condições para tratar o caso com incertezas do tipo politópica não parecem imediatas. Além disso, a abordagem baseada na estabilidade quadrática (isto é, o uso de uma matriz de Lyapunov fixa) pode apresentar resultados conservadores na avaliação de sistemas com incertezas invariantes no tempo. Apesar de existirem resultados recentes utilizando-se funções de Lyapunov dependentes de parâmetro para investigar a estabilidade robusta [dOBG99], [LP03a],

[PABB00], [RP01a], para cômputo de ganhos robustos de realimentação de estados para sistemas incertos discretos no tempo em domínios politópicos [dOGB02] bem como para tratar sistemas discretos e variantes no tempo [DB01], [LP04], até o momento, não foram feitas extensões desses resultados para o caso de sistemas com atraso nos estados.

Este capítulo trata de sistemas lineares discretos no tempo com atraso nos estados e nas equações de saída. Todas as matrizes do sistemas são assumidas invariantes no tempo e incertas, porém pertencentes a um domínio politópico com vértices conhecidos. O problema da estabilidade robusta é investigado por meio de funcionais de Lyapunov-Krasovskii. Condições equivalentes do tipo LMI são apresentadas, algumas incluindo matrizes extras. A partir dessas condições, uma abordagem convexa é apresentada para o caso de síntese de ganho estabilizante robusto. Embora as LMIs sejam do tipo independentes do atraso, essas LMIs podem também ser usadas para a síntese de ganho de realimentação de estados atrasados. Quando o atraso é conhecido, essa estratégia pode proporcionar ganhos estabilizantes em situações nas quais uma realimentação de estados do tipo sem memória pode não existir. Como discutido em [Ric03], as leis de realimentação dependentes de estados atrasados podem proporcionar graus de liberdade úteis e interessantes mesmo para sistemas sem atrasos. Condições LMIs suficientes e independentes do atraso para a determinação do custo garantido \mathcal{H}_∞ e para a obtenção de um controle robusto \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados são apresentadas. Essas condições também permitem calcular um ganho para controle robusto \mathcal{H}_∞ dependente de estados atrasados, que pode ser usado para melhorar o nível de atenuação \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada, sempre que o atraso for conhecido. Além disso, as condições convexas aqui apresentadas podem ser estendidas para tratar o caso de síntese de controle descentralizado sem impor restrições de estrutura nas matrizes dependentes de parâmetro do funcional de Lyapunov-Krasovskii usado para assegurar a estabilidade da malha fechada.

Como todas as matrizes do sistema podem ser afetadas por incertezas politópicas, a abordagem proposta neste capítulo permite também tratar sistemas incertos sujeitos a falhas parciais ou totais de atuadores. Apesar das incertezas, assim como os atrasos, serem invariantes no tempo, alguns dos resultados apresentados como corolários — e baseados em funcionais de Lyapunov-Krasovskii fixos — podem também ser aplicados a sistemas com incertezas variantes no tempo e com atrasos constantes. Exemplos numéricos são apresentados, mostrando que as condições independentes do atraso propostas podem, em alguns casos, fornecer resultados menos conservadores que as dependentes de atraso. Finalmente, o modelo de um aquecedor elétrico industrial é investigado. Várias estratégias de controle robusto \mathcal{H}_∞ descentralizado são propostas e analisadas em detalhes.

5.2 Preliminares e formulação do problema

Considere o sistema linear incerto discreto no tempo dado por

$$\Omega(\alpha) : \begin{cases} x(k+1) = A(\alpha)x(k) + A_h(\alpha)x(k-h) + B(\alpha)u(k) + B_h(\alpha)u_h(k) + B_w(\alpha)w(k) \\ z(k) = C(\alpha)x(k) + C_h(\alpha)x(k-h) + D(\alpha)u(k) + D_h(\alpha)u_h(k) + D_w(\alpha)w(k) \\ x(k) = 0, \quad k \leq 0 \end{cases}, \quad (5.1)$$

em que $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $h \in \mathbb{N}$ é o valor do atraso de tempo (suposto constante), $u(k) \in \mathbb{R}^{m_1}$, $u_h(k) \in \mathbb{R}^{m_2}$ representam as entradas de controle, $w(k) \in \mathbb{R}^\ell$ é o vetor exógeno de distúrbio e $z(k) \in \mathbb{R}^p$ é a saída controlada. Note-se que as duas matrizes de entrada de controle podem ter dimensões diferentes,

permitindo uma modelagem mais precisa de dispositivos distintos de atuação. O atraso h não é usado no desenvolvimento das condições de análise e síntese de controle, mas, se h for conhecido, a entrada de controle $u_h(k)$ dependente de valores passados dos estados $x(k)$ pode ser usada para realimentação, mesmo no caso $B = B_h$. Apesar de tratar-se aqui apenas de um único atraso, a extensão dos resultados para múltiplos atrasos é imediata. As matrizes $A(\alpha)$, $A_h(\alpha)$, $B(\alpha)$, $B_h(\alpha)$, $B_w(\alpha)$, $C(\alpha)$, $C_h(\alpha)$, $D(\alpha)$, $D_h(\alpha)$, $D_w(\alpha)$, de dimensões adequadas, definem o sistema $\Omega(\alpha)$ e são assumidas fixas porém não precisamente conhecidas, isto é, $\Omega(\alpha)$ pertence ao conjunto politópico \mathbb{A}_h descrito por

$$\mathbb{A}_h \triangleq \left\{ \Omega(\alpha) \in \mathbb{R}^{n+p \times 2n+m_1+m_2+\ell} : \Omega(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Omega_j, \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, N \right\} \quad (5.2)$$

com vértices

$$\Omega_j \triangleq \left[\begin{array}{cc|cc|c} A_j & A_{hj} & B_j & B_{hj} & B_{wj} \\ C_j & C_{hj} & D_j & D_{hj} & D_{wj} \end{array} \right]; j = 1, \dots, N. \quad (5.3)$$

Note-se que qualquer $\Omega(\alpha) \in \mathbb{A}_h$ pode ser escrito como uma combinação convexa dos N vértices Ω_j de \mathbb{A}_h . As seguintes leis de controle são consideradas

$$u(k) = Kx(k) \quad \text{e} \quad u_h(k) = K_h x(k-h), \quad (5.4)$$

nas quais $K \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$ e $K_h \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$. Neste capítulo, as condições convexas para a síntese de K e K_h não dependem do valor do atraso h , mas permitem o uso do estado atrasado no caso de h conhecido. Se h for desconhecido, então apenas $u(k)$ deve ser considerada (lei de controle sem memória) e, neste caso, $K_h = \mathbf{0}$.

Portanto, usando (5.4) e (5.1)-(5.3), o sistema incerto em malha fechada é dado por

$$\tilde{\Omega}(\alpha) : \begin{cases} x(k+1) = \tilde{A}(\alpha)x(k) + \tilde{A}_d(\alpha)x(k-h) + B_w(\alpha)w(k) \\ z(k) = \tilde{C}(\alpha)x(k) + \tilde{C}_d(\alpha)x(k-h) + D_w(\alpha)w(k) \\ x(k) = 0, \quad k \leq 0 \end{cases}, \quad (5.5)$$

em que $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ é dado por

$$\tilde{\mathbb{A}}_h \triangleq \left\{ \tilde{\Omega}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n+p \times 2n+\ell} : \tilde{\Omega}(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \tilde{\Omega}_j, \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, N \right\}, \quad (5.6)$$

e as matrizes vértices da malha fechada são

$$\tilde{A}_j \triangleq A_j + B_j K; \quad \tilde{A}_{dj} \triangleq A_{hj} + B_{hj} K_h \quad (5.7)$$

$$\tilde{C}_j \triangleq C_j + D_j K; \quad \tilde{C}_{dj} \triangleq C_{hj} + D_{hj} K_h \quad (5.8)$$

definindo os vértices correspondentes

$$\tilde{\Omega}_j \triangleq \left[\begin{array}{cc|c} \tilde{A}_j & \tilde{A}_{dj} & B_{wj} \\ \tilde{C}_j & \tilde{C}_{dj} & D_{wj} \end{array} \right]; j = 1, \dots, N \quad (5.9)$$

O principal objetivo deste capítulo é resolver os seguintes problemas, nos quais o atraso do sistema é considerado fixo e maior ou igual a zero.

Problema 5.1 (*Controle robusto*)

Dado o sistema incerto $\Omega(\alpha) \in \mathbb{A}_h$ com Ω_j definido por

$$\Omega_j = \left[\begin{array}{cc|cc|c} A_j & A_{hj} & B_j & B_{hj} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]; j = 1, \dots, N \quad (5.10)$$

determinar ganhos de realimentação de estados K e K_h , tais que o sistema correspondente incerto em malha fechada $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ com

$$\tilde{\Omega}_j = \left[\begin{array}{c|c|c} \tilde{A}_j & \tilde{A}_{dj} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right]; j = 1, \dots, N. \quad (5.11)$$

e $\tilde{A}_j, \tilde{A}_{dj}$ definidos em (5.7) seja robustamente estável independentemente do atraso.

Problema 5.2 (*Controle robusto \mathcal{H}_∞*)

Dado o sistema incerto $\Omega(\alpha) \in \mathbb{A}_h$ com Ω_j definido em (5.3) e um escalar $\gamma > 0$ determinar ganhos de realimentação de estados K e K_h , tais que o correspondente sistema incerto em malha fechada $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ dado por (5.5)-(5.9) seja robustamente estável independentemente do atraso e que, adicionalmente, para todo $w(k) \in \ell_2$ tenha-se $z(k) \in \ell_2$ satisfazendo

$$\|z(k)\|_2 < \gamma \|w(k)\|_2 \quad (5.12)$$

Qualquer γ satisfazendo (5.12) é um custo garantido \mathcal{H}_∞ para o sistema.

Na seqüência, são formuladas condições convexas para a análise de estabilidade robusta do sistema incerto (5.11). Essas condições são inicialmente formuladas de forma convexa, porém de dimensão infinita em relação ao parâmetro incerto α . Depois, condições suficientes formuladas em um número finito de LMIs são propostas. Em seguida, condições convexas LMI suficientes para resolver os Problemas 5.1 e 5.2 são apresentadas nas Seções 5.4 e 5.5, respectivamente.

5.3 Estabilidade robusta

Primeiramente, a análise de estabilidade robusta do sistema incerto em malha fechada $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ com $\tilde{\Omega}_j$ dado em (5.11) é investigada, e condições suficientes do tipo LMI são apresentadas. A partir dessas condições, que são de dimensão infinita no parâmetro incerto α , uma solução convexa e de dimensão finita para o Problema 5.1 é proposta.

O teorema seguinte estabelece quatro condições equivalentes baseadas na existência de matrizes de Lyapunov-Krasovskii dependentes de parâmetro que asseguram a estabilidade robusta do sistema $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ com (5.11).

Teorema 5.1 *O sistema incerto discreto no tempo $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ com (5.11) é robustamente estável independentemente do atraso de tempo h se existirem matrizes simétricas, definidas positivas e dependente de parâmetro $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $S(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que uma das condições equivalentes seguintes seja verificada para todo $\alpha \in \mathbb{R}^N : \alpha_j \geq 0$ e $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$:*

a) *O funcional de Lyapunov-Krasovskii $V(x(k))$ dado por*

$$V(\alpha, x(k)) \triangleq x(k)' P(\alpha) x(k) + \sum_{j=0}^h x(k-j)' S(\alpha) x(k-j) \quad (5.13)$$

é tal que

$$V(\alpha, x(k)) > 0 \quad e \quad \Delta V(\alpha, x(k)) \triangleq V(\alpha, x(k+1)) - V(\alpha, x(k)) < 0 \quad (5.14)$$

para todo $\begin{bmatrix} x(k)' & x(k-h)' \end{bmatrix}' \neq \mathbf{0}$.

b)

$$\Upsilon(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{A}(\alpha)'((S(\alpha) + P(\alpha))\tilde{A}(\alpha) - P(\alpha) & \tilde{A}(\alpha)'((S(\alpha) + P(\alpha))\tilde{A}_d(\alpha) \\ \star & \tilde{A}_d(\alpha)'((S(\alpha) + P(\alpha))\tilde{A}_d(\alpha) - S(\alpha) \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (5.15)$$

c)

$$\Theta(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} -(S(\alpha) + P(\alpha)) & (S(\alpha) + P(\alpha))\tilde{A}(\alpha) & (S(\alpha) + P(\alpha))\tilde{A}_d(\alpha) \\ \star & -P(\alpha) & \mathbf{0} \\ \star & \star & -S(\alpha) \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (5.16)$$

d) Existirem matrizes dependentes de parâmetro $F(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $H(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que

$$\mathcal{M}(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} F(\alpha) + F(\alpha)' + P(\alpha) + S(\alpha) & G(\alpha)' - F(\alpha)'\tilde{A}(\alpha) \\ \star & -(P(\alpha) + G(\alpha)\tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)'G(\alpha)') \\ \star & \star \\ & H(\alpha)' - F(\alpha)'\tilde{A}_d(\alpha) \\ & -(G(\alpha)\tilde{A}_d(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)'H(\alpha)') \\ & -(S(\alpha) + H(\alpha)\tilde{A}_d(\alpha) + \tilde{A}_d(\alpha)'H(\alpha)') \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (5.17)$$

Prova: Desenvolvendo-se (5.14), usando-se (5.5)-(5.7) e (5.11) e considerando-se $\Upsilon(\alpha)$, dado em (5.15), é possível obter

$$\begin{aligned} \Delta V(\alpha, x(k)) &= x(k+1)'(S(\alpha) + P(\alpha))x(k+1) - x(k)'P(\alpha)x(k) - x(k-h)'S(\alpha)x(k-h) \\ &= \begin{bmatrix} x(k)' & x(k-h)' \end{bmatrix} \Upsilon(\alpha) \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-h) \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

e, claramente, com $P(\alpha) > \mathbf{0}$ e $S(\alpha) > \mathbf{0}$, *a*) é verificada se e somente se *b*) é verificada. A equivalência entre *b*) e *c*) é estabelecida pela aplicação direta do complemento de Schur. Finalmente, note-se que se a condição *c*) é verificada, então (5.17) é verificada para $F(\alpha) = F(\alpha)' = -(P(\alpha) + S(\alpha))$, $G(\alpha) = H(\alpha) = \mathbf{0}$. Por outro lado, se *d*) é verificada, então $\Upsilon(\alpha) = T(\alpha)'\mathcal{M}(\alpha)T(\alpha) < \mathbf{0}$ com $T(\alpha)$ dado por

$$T(\alpha) = \begin{bmatrix} \tilde{A}(\alpha) & \tilde{A}_d(\alpha) \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

■

Note que as quatro condições equivalentes são suficientes para a estabilidade robusta de $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{A}}_h$ com (5.11), sendo estabelecidas em termos de matrizes dependentes de parâmetro $P(\alpha)$, $S(\alpha)$, $F(\alpha)$, $G(\alpha)$ e $H(\alpha)$. Essas condições precisam ser verificadas para todo $\alpha \in \mathbb{R}^N : \alpha_j \geq 0$ e $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$, o que torna esse problema de dimensão infinita em α (no caso de α possuir algum intervalo contínuo em seu domínio). Note ainda que as condições do Teorema 5.1 são válidas para quaisquer conjuntos $\tilde{\Omega}(\alpha)$, convexos ou não. Uma observação a respeito do Teorema 5.1 é que as variáveis matriciais extras na condição *d*) podem ser utilizadas para proporcionar condições menos conservadoras para a avaliação de estabilidade robusta, bem como fornecer condições para a síntese de controle robusto como solução do Problema 5.1.

O problema de dimensão infinita nas equações (5.15)-(5.17) pode ser aproximado por um conjunto finito de LMIs, descritas apenas em termos dos vértices $\tilde{\Omega}_j$ de $\tilde{\mathbb{A}}_h$, seguindo as mesmas idéias apresentadas nos capítulos 2 e 3. No entanto, essas extensões não são apresentadas neste trabalho. Outra abordagem é fixar as matrizes extras $F(\alpha) = F$, $G(\alpha) = G$ e $H(\alpha) = H$ e impor a seguinte estrutura para as matrizes dependentes de parâmetro $P(\alpha)$ e $S(\alpha)$ do funcional de Lyapunov-Krasovskii

$$P(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j P_j; \quad S(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j S_j; \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1; \quad \alpha_j \geq 0 \quad (5.20)$$

como é exposto no teorema seguinte.

Teorema 5.2 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$, e matrizes $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que*

$$\mathcal{M}_j \triangleq \begin{bmatrix} F + F' + P_j + S_j & G' - F\tilde{A}_j & H' - F\tilde{A}_{dj} \\ \star & -(P_j + G\tilde{A}_j + \tilde{A}_j'G') & -(G\tilde{A}_{dj} + \tilde{A}_j'H') \\ \star & \star & -(S_j + H\tilde{A}_{dj} + \tilde{A}_{dj}'H') \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N, \quad (5.21)$$

então as condições do Teorema 5.1 são verificadas com $F(\alpha) = F$, $G(\alpha) = G$, $H(\alpha) = H$ e $P(\alpha)$, $S(\alpha)$, dadas em (5.20).

Prova: Multiplicando-se (5.21) por α_j e somando-se em $j = 1, \dots, N$, obtém-se (5.17). ■

Note-se que a condição de estabilidade quadrática poderia ser imposta como uma solução particular do Teorema 5.1 por meio da fixação das matrizes do funcional de Lyapunov-Krasovskii, isto é, fazendo $P(\alpha) = P$ e $S(\alpha) = S$. Essa condição pode ser igualmente recuperada a partir do Teorema 5.2, bastando impor $P_i = P$, $S_i = S$, $F = F' = -(S + P)$ e $G = H = \mathbf{0}$ em (5.21), como apresentado no seguinte corolário.

Corolário 5.1 *Se existirem matrizes simétricas positiva definidas $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que*

$$\Theta_j^q \triangleq \begin{bmatrix} -(P + S) & (P + S)\tilde{A}_j & (P + S)\tilde{A}_{dj} \\ \star & -P & \mathbf{0} \\ \star & \star & -S \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N, \quad (5.22)$$

então as condições do Teorema 5.1 são verificadas com $P(\alpha) = P$, $S(\alpha) = S$, $F(\alpha) = F(\alpha)' = -(P + S)$ e $G(\alpha) = H(\alpha) = \mathbf{0}$, implicando que o sistema em malha fechada $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ com (5.11) é quadraticamente estável, independentemente do valor h do atraso de tempo.

O uso de matrizes fixas P e S no Corolário 5.1 assegura a estabilidade do sistema, mesmo no caso de matrizes incertas variantes no tempo $\tilde{A}(\alpha)$ e $\tilde{A}_d(\alpha)$. Observe-se ainda que condições de estabilidade robusta similares às apresentadas aqui podem ser obtidas em termos do dual do sistema $\tilde{\Omega}(\alpha)$, isto é, trocando $\tilde{A}(\alpha)$ por $\tilde{A}(\alpha)'$ e $\tilde{A}_d(\alpha)$ por $\tilde{A}_d(\alpha)'$ em (5.15)-(5.17) e \tilde{A}_j por \tilde{A}_j' e \tilde{A}_{dj} por \tilde{A}_{dj}' em (5.21)-(5.22).

5.4 Controle robusto

Nesta seção, o grau extra de liberdade proporcionado pelas matrizes F , G e H no Teorema 5.2 e no Corolário 5.1 é usado para prover condições suficientes para resolver o Problema 5.1. Para isso, considere-se o sistema incerto discreto no tempo com atraso nos estados, definido por $\Omega(\alpha) \in \mathbb{A}_h$ com (5.10) e suponha-se que os vetores de estado, $x(k)$, e de estado atrasado, $x(k-h)$ estejam disponíveis para realimentação. Uma condição suficiente para a existência de ganhos robustos de realimentação de estados K e K_h , tais que, com $u(k)$ e $u(k-h)$, dados em (5.4), o sistema incerto em malha fechada $\tilde{\Omega}(\alpha)$ seja robustamente estável é dada abaixo.

Teorema 5.3 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $\tilde{P}_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\tilde{S}_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$, e matrizes $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$ e $Z_h \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$, tais que*

$$\Xi_j \triangleq \begin{bmatrix} L' + L + \tilde{P}_j + \tilde{S}_j & -(A_j L + B_j Z) & -(A_{hj} L + B_{hj} Z_h) \\ \star & -\tilde{P}_j & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\tilde{S}_j \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N, \quad (5.23)$$

então os ganhos robustos de realimentação de estados K e K_h dados por

$$K = ZL^{-1} \text{ e } K_h = Z_h L^{-1} \quad (5.24)$$

são tais que o sistema em malha fechada $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ com (5.11) é robustamente estável independentemente do valor h do atraso de tempo. Além disso, $P_j = (L')^{-1} \tilde{P}_j L^{-1}$ e $S_j = (L')^{-1} \tilde{S}_j L^{-1}$, $j = 1, \dots, N$, $P(\alpha)$, $S(\alpha)$ dados em (5.20) e $F = (L')^{-1}$, $G = H = \mathbf{0}$ são tais que as condições do Teorema 5.2 são verificadas.

Prova: Se (5.23) é verificada, então $P_j > \mathbf{0}$, $S_j > \mathbf{0}$ e, portanto, $L' + L < \mathbf{0}$, implicando que L é não-singular. Definindo-se

$$F = (L')^{-1}; \quad W = \mathbf{I}_3 \otimes F \quad (5.25)$$

e usando-se (5.24), tem-se $Z = K(F')^{-1}$ e $Z_h = K_h(F')^{-1}$, e conclui-se que $\Lambda_j = W\Xi_j W'$ é tal que

$$\Lambda_j \triangleq \begin{bmatrix} F' + F + F\tilde{P}_j F' + F\tilde{S}_j F' & -F(A_j + B_j K) & -F(A_{hj} + B_{hj} K_h) \\ \star & -F\tilde{P}_j F' & \mathbf{0} \\ \star & \star & -F\tilde{S}_j F' \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (5.26)$$

assegurando que as condições do Teorema 5.2, $\mathcal{M}_j < \mathbf{0}$, $j = 1, \dots, N$, são verificadas com $P_j = F\tilde{P}_j F'$, $S_j = F\tilde{S}_j F'$, $G = H = \mathbf{0}$, $\tilde{A}_j = A_j + BK$ e $\tilde{A}_{dj} = A_{hj} + B_h K_h$. ■

Note-se que uma condição muito parecida com (5.23) poderia ser obtida impondo $G = H = \mathbf{0}$ em \mathcal{M}_j , Teorema 5.2, usando-se a representação dual do sistema incerto, isto é, trocando-se \tilde{A}_j por $(A_j + B_j K)'$ e \tilde{A}_{dj} por $(A_{hj} + B_{hj} K_h)'$ e, então, aplicando a mudança de variáveis $Z = KL$ e $Z_h = K_h L$.

Note-se ainda que, se o vetor de estados atrasados, $x(k-h)$, não estiver disponível (por exemplo, se h é desconhecido), as condições do Teorema 5.3 ainda podem ser usadas, impondo-se $Z_h = \mathbf{0}$ em (5.23). Finalmente, é importante ressaltar que o Teorema 5.3 contém os resultados de estabilização quadrática, conforme estabelecido no corolário seguinte.

Corolário 5.2 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\tilde{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$ e $Z_h \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$, tais que*

$$\Xi_j^q \triangleq \begin{bmatrix} L' + L + \tilde{P} + \tilde{S} & -(A_j L + B_j Z) & -(A_{hj} L + B_{hj} Z_h) \\ \star & -\tilde{P} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\tilde{S} \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N, \quad (5.27)$$

então os ganhos robustos de realimentação de estados K e K_h dados por (5.24) são tais que o sistema incerto em malha fechada $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ com (5.11) é quadraticamente estável, independentemente do valor h do atraso de tempo.

Embora existam na literatura resultados equivalentes para a estabilização quadrática (os quais, em geral, não são formulados em termos de LMIs), o Corolário 5.2 fornece uma condição mais interessante para tratar restrições estruturais nos ganhos de realimentação. Isso se deve à matriz extra L usada para o cômputo dos ganhos de controle não aparecer no funcional de Lyapunov-Krasovskii. A escolha $L = -(\tilde{P} + \tilde{S})$ recupera a condição de estabilização quadrática padrão, como apresentado no corolário seguinte.

Corolário 5.3 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\tilde{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $Z \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$ e $Z_h \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$, tais que*

$$\Xi_j^{q2} \triangleq \begin{bmatrix} -(\tilde{P} + \tilde{S}) & A_j \tilde{P} + A_j \tilde{S} + B_j Z & A_{hj} \tilde{P} + A_{hj} \tilde{S} + B_{hj} Z_h \\ \star & -\tilde{P} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\tilde{S} \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N, \quad (5.28)$$

então os ganhos robustos de realimentação de estados K e K_h dados por

$$K = Z(\tilde{P} + \tilde{S})^{-1} \text{ e } K_h = Z_h(\tilde{P} + \tilde{S})^{-1} \quad (5.29)$$

são tais que o sistema incerto em malha fechada $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ com (5.11) é quadraticamente estável, independentemente do valor h do atraso de tempo.

Note-se que uma condição equivalente para a estabilização quadrática poderia ser obtida diretamente do Corolário 5.1, considerando-se o sistema dual, isto é, trocando-se \tilde{A}_j por $(A_j + B_j K)'$ e \tilde{A}_{dj} por $(A_{hj} + B_{hj} K_h)'$, e usando-se a linearização de variáveis dada por $(P + S)K' = Z$ e $(P + S)K_h' = Z_h$. As vantagens do Corolário 5.2 com relação ao Corolário 5.3 ficarão mais evidentes na síntese de controle descentralizado. De fato, graças ao grau extra de liberdade proporcionado pela matriz L , ganhos robustos descentralizados para a realimentação de estados podem ser calculados a partir do Corolário 5.2 sem a imposição de restrições estruturais nas matrizes de Lyapunov-Krasovskii. Finalmente, é importante salientar que, diferentemente da maioria dos resultados encontrados na literatura, os Teoremas 5.2 e 5.3 e os Corolários 5.1, 5.2 e 5.3 são formulados como condições LMI convexas, de dimensão finita, permitindo uma solução eficaz para os problemas de estabilidade e estabilização robustas por meio da aplicação de algoritmos especializados que podem ser resolvidos em tempo polinomial.

5.5 Controle robusto \mathcal{H}_∞

Nesta seção, o custo garantido \mathcal{H}_∞ do sistema incerto $\tilde{\Omega}(\alpha)$ dado em (5.5)-(5.9) é relacionado à existência de matrizes dependentes de parâmetro que satisfazem algumas condições convexas equivalentes.

Impondo uma estrutura especial a essas matrizes, é possível obter condições LMI suficientes para o cômputo de um custo garantido \mathcal{H}_∞ . Desses resultados, condições suficientes LMI são propostas para a síntese de ganhos robustos K e K_h , resolvendo o Problema 5.2.

Teorema 5.4 *O sistema incerto discreto no tempo $\tilde{\Omega}(\alpha)$ dado em (5.5)-(5.9) é robustamente estável com um custo garantido \mathcal{H}_∞ dado por $\gamma = \sqrt{\mu}$, independentemente do valor h do atraso de tempo, se existirem matrizes simétricas positivas definidas dependentes de parâmetro $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $S(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que uma das seguintes condições equivalentes seja verificada para todo $\alpha \in \mathbb{R}^N : \alpha_j \geq 0$ e $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$:*

a)

$$\mathcal{N}(\alpha) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \Upsilon(\alpha) & \begin{array}{c} \tilde{A}(\alpha)'(P(\alpha) + S(\alpha))B_w(\alpha) \\ \tilde{A}_d(\alpha)'(P(\alpha) + S(\alpha))B_w(\alpha) \end{array} \\ \star & B_w(\alpha)'(P(\alpha) + S(\alpha))B_w(\alpha) - \mu \mathbf{I}_\ell \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \tilde{C}(\alpha)' \\ \tilde{C}_d(\alpha)' \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \tilde{C}(\alpha)' \\ \tilde{C}_d(\alpha)' \end{array} \right]' < \mathbf{0}, \quad (5.30)$$

em que $\Upsilon(\alpha)$ é dado em (5.15).

b)

$$\mathcal{R}(\alpha) \triangleq \left[\begin{array}{c|cc} \Theta(\alpha) & \mathbf{0} & (P(\alpha) + S(\alpha))B_w(\alpha) \\ & \tilde{C}(\alpha)' & \mathbf{0} \\ & \tilde{C}_d(\alpha)' & \mathbf{0} \\ \star & -\mathbf{I}_p & D_w(\alpha) \\ & \star & -\mu \mathbf{I}_\ell \end{array} \right] < \mathbf{0}, \quad (5.31)$$

em que $\Theta(\alpha)$ é dado em (5.16).

c) *Existirem matrizes dependente de parâmetro $F(\alpha)$, $F_2(\alpha)$, $G(\alpha)$, $G_2(\alpha)$, $H(\alpha)$, $H_2(\alpha)$, $X_1(\alpha)$, $X_2(\alpha)$, $M_1(\alpha)$ e $M_2(\alpha)$, tais que*

$$\mathcal{Q}(\alpha) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{M}(\alpha) + \mathbf{Q}_1(\alpha) & \mathbf{Q}_2(\alpha) \\ \star & \mathbf{Q}_3(\alpha) \end{array} \right] < \mathbf{0}, \quad (5.32)$$

em que $\mathcal{M}(\alpha)$ é dado em (5.17) e

$$\mathbf{Q}_1(\alpha) \triangleq \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{0} & -F_2(\alpha)\tilde{C}(\alpha) & -F_2(\alpha)\tilde{C}_d(\alpha) \\ \star & -(G_2(\alpha)\tilde{C}(\alpha) + \tilde{C}(\alpha)'G_2(\alpha)') & -(G_2(\alpha)\tilde{C}_d(\alpha) + \tilde{C}(\alpha)'H_2(\alpha)') \\ \star & \star & -(H_2(\alpha)\tilde{C}_d(\alpha) + \tilde{C}_d(\alpha)'H_2(\alpha)') \end{array} \right] \quad (5.33)$$

$$\mathbf{Q}_2(\alpha) \triangleq \left[\begin{array}{c} X_1(\alpha)' + F_2(\alpha) \\ G_2(\alpha) - (\tilde{A}(\alpha)'X_1(\alpha)' + \tilde{C}(\alpha)'X_2(\alpha)') \\ H_2(\alpha) - (\tilde{A}_d(\alpha)'X_1(\alpha)' + \tilde{C}_d(\alpha)'X_2(\alpha)') \\ M_1(\alpha)' - (F_1(\alpha)B_w(\alpha) + F_2(\alpha)D_w(\alpha)) \\ -(G(\alpha)B_w(\alpha) + G_2(\alpha)D_w(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)'M_1(\alpha)' + \tilde{C}(\alpha)'M_2(\alpha)') \\ -(H(\alpha)B_w(\alpha) + H_2(\alpha)D_w(\alpha) + \tilde{A}_d(\alpha)'M_1(\alpha)' + \tilde{C}_d(\alpha)'M_2(\alpha)') \end{array} \right] \quad (5.34)$$

$$\mathbf{Q}_3(\alpha) \triangleq \left[\begin{array}{c} \mathbf{I}_p + X_2(\alpha) + X_2(\alpha)' \\ \star \\ M_2(\alpha)' - (X_1(\alpha)B_w(\alpha) + X_2(\alpha)D_w(\alpha)) \\ -(\mu \mathbf{I}_\ell + M_1(\alpha)B_w(\alpha) + B_w(\alpha)'M_1(\alpha)' + M_2(\alpha)D_w(\alpha) + D_w(\alpha)'M_2(\alpha)') \end{array} \right] \quad (5.35)$$

Prova: Uma condição bem conhecida [KP99] para assegurar a estabilidade robusta do sistema $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ com um nível de atenuação pré-estabelecido γ é dada por:

$$z(k)'z(k) - \gamma^2 w(k)'w(k) + \Delta V(\alpha, x(k)) < 0 \quad (5.36)$$

Como $z(k)$, $w(k)$ e $x(k)$ satisfazem as equações de malha fechada (5.5)-(5.8), (5.36) é reescrita como $\xi(k)' \mathcal{N}(\alpha) \xi(k) < 0$, $\forall \xi(k) \neq 0$,

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} x(k)' & x(k-h)' & w(k)' \end{bmatrix}' \quad (5.37)$$

e $\mathcal{N}(\alpha)$ dado em (5.30). A equivalência entre *a*) e *b*) pode ser obtida, aplicando-se o complemento de Schur em (5.30) e pré-multiplicando-se essa equação por U e pós-multiplicando-se por U' , com

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_p \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_\ell & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Note-se ainda que $\mathcal{N}(\alpha) = E(\alpha)' \mathcal{Q}(\alpha) E(\alpha)$ com

$$E(\alpha) = \left[\begin{array}{cc|cc} & & & B_w(\alpha) \\ & T(\alpha) & & \mathbf{0} \\ & & & \mathbf{0} \\ \hline \tilde{C}(\alpha) & \tilde{C}_d(\alpha) & & D_w(\alpha) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{I}_\ell \end{array} \right]$$

e $T(\alpha)$ definido em (5.19). Por outro lado, se $\mathcal{R}(\alpha) < 0$, então existe um escalar $\epsilon(\alpha) \in \mathbb{R}_+$, tal que $\mathcal{Q}(\alpha) < 0$ para

$$F(\alpha) = -\frac{\epsilon(\alpha)}{2} \mathbf{I}_n ; F_2(\alpha) = \mathbf{0} ; G(\alpha) = \frac{\epsilon(\alpha)}{2} \tilde{A}(\alpha)' ; G_2(\alpha) = \frac{\epsilon(\alpha)}{2} \tilde{C}(\alpha)'$$

$$H(\alpha) = \frac{\epsilon(\alpha)}{2} \tilde{A}_d(\alpha)' ; H_2(\alpha) = \frac{\epsilon(\alpha)}{2} \tilde{C}_d(\alpha)' ; X_1(\alpha) = \mathbf{0} ; X_2(\alpha) = -\frac{\epsilon(\alpha)}{2} \mathbf{I}_p$$

$$M_1(\alpha) = \frac{\epsilon(\alpha)}{2} B_w(\alpha)' ; M_2(\alpha) = \frac{\epsilon(\alpha)}{2} D_w(\alpha)'$$

■

Como no Teorema 5.1, as condições do Teorema 5.4 precisam ser verificadas para todos os valores admissíveis de α , sendo válidas para qualquer conjunto de incertezas $\tilde{\mathcal{D}}$. Uma condição convexa de dimensão finita é dada a seguir, assegurando que as equações (5.30)-(5.32) são verificadas.

Teorema 5.5 *Se existirem matrizes simétricas positivas definidas $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $S_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$, matrizes de dimensões apropriadas $F, F_2, G, G_2, H, H_2, X_1, X_2, M_1, M_2$ e um escalar positivo $\gamma = \sqrt{\mu}$, tais que*

$$\mathcal{Q}_j \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{M}_j + \mathcal{Q}_{1j} & \mathcal{Q}_{2j} \\ \hline \star & \mathcal{Q}_{3j} \end{array} \right] < 0; \quad j = 1, \dots, N, \quad (5.38)$$

em que \mathcal{M}_j está definido em (5.21) e

$$\mathbf{Q}_{1j} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -F_2 \tilde{C}'_j & -F_2 \tilde{C}'_{dj} \\ \star & -(G_2 \tilde{C}'_j + \tilde{C}'_j G'_2) & -(G_2 \tilde{C}'_{dj} + \tilde{C}'_{dj} H'_2) \\ \star & \star & -(H_2 \tilde{C}'_{dj} + \tilde{C}'_{dj} H'_2) \end{bmatrix}, \quad (5.39)$$

$$\mathbf{Q}_{2j} \triangleq \begin{bmatrix} X'_1 + F_2 & M'_1 - (F B_{wj} + F_2 D_{wj}) \\ G_2 - (\tilde{A}'_j X'_1 + \tilde{C}'_j X'_2) & -(G B_{wj} + G_2 D_{wj} + \tilde{A}'_j M'_1 + \tilde{C}'_j M'_2) \\ H_2 - (\tilde{A}'_{dj} X'_1 + \tilde{C}'_{dj} X'_2) & -(H B_{wj} + H_2 D_{wj} + \tilde{A}'_{dj} M'_1 + \tilde{C}'_{dj} M'_2) \end{bmatrix}, \quad (5.40)$$

$$\mathbf{Q}_{3j} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p + X_2 + X'_2 & M'_2 - (X_1 B_{wj} + X_2 D_{wj}) \\ \star & -(\mu \mathbf{I}_\ell + M_1 B_{wj} + B'_{wj} M'_1 + M_2 D_{wj} + D'_{wj} M'_2) \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

então o sistema $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$ é robustamente estável com um custo garantido \mathcal{H}_∞ dado por γ . Além disso, as condições do Teorema 5.4 são asseguradas com $F(\alpha) = F$, $F_2(\alpha) = F_2$, $G(\alpha) = G$, $G_2(\alpha) = G_2$, $H(\alpha) = H$, $H_2(\alpha) = H_2$, $X_1(\alpha) = X_1$, $X_2(\alpha) = X_2$, $M_1(\alpha) = M_1$, $M_2(\alpha) = M_2$, $P(\alpha)$ e $S(\alpha)$ definidas como em (5.20).

Prova: A prova vem do fato de que $\mathcal{Q}(\alpha)$ em (5.32) pode ser re-escrita como $\mathcal{Q}(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \mathbf{Q}_j$, $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$, $\alpha_j \geq 0$. ■

Note-se que, com os resultados do Teorema 5.5, o seguinte problema de otimização convexa pode ser formulado, proporcionando o mínimo $\gamma = \sqrt{\mu}$, tal que (5.38) é verificada:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{H}_\infty} : \begin{cases} \min & \mu \\ P_j = P'_j > \mathbf{0}; S_j = S'_j > \mathbf{0} \\ F, F_2, G, G_2, H, H_2, X_1, X_2, M_1, M_2 \\ \text{tal que (5.38) é verificada} \end{cases} \quad (5.42)$$

Condições quadráticas podem ser obtidas a partir dos resultados do Teorema 5.5, bastando-se para isso impor $P_j = P = P' > \mathbf{0}$ e $S_j = S = S' > \mathbf{0}$, $j = 1, \dots, N$, $F = -(P + S)$, $X_2 = -\mathbf{I}_p$ e fazendo-se as matrizes H , G , F_2 , H_2 , G_2 , X_1 , M_1 e M_2 iguais a zero em (5.38). Essa abordagem permite o cômputo do custo garantido \mathcal{H}_∞ para o sistema $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$ com parâmetro incerto variante no tempo e atraso fixo. Esse resultado é enunciado no corolário seguinte.

Corolário 5.4 Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e um escalar positivo $\gamma = \sqrt{\mu}$, tais que

$$\mathcal{R}_j = \left[\begin{array}{c|cc} \Theta_j^q & \mathbf{0} & (P + S)B_{wj} \\ & \tilde{C}'_j & \mathbf{0} \\ & \tilde{C}'_{dj} & \mathbf{0} \\ \hline \star & -\mathbf{I}_p & D_{wj} \\ & \star & -\mu \mathbf{I}_\ell \end{array} \right] < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N, \quad (5.43)$$

com Θ_j^q dado (5.22), então o sistema $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$ é quadraticamente estável com um custo garantido \mathcal{H}_∞ dado por γ .

Na seqüência, as variáveis matriciais extras presentes no Teorema 5.5 são utilizadas para proporcionar uma solução ao Problema 5.2.

Teorema 5.6 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $\tilde{P}_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\tilde{S}_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$, matrizes $Z \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$, $Z_h \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e escalares $0 < \beta \leq 1$ e $\gamma = \sqrt{\mu} > 0$, tais que*

$$\Pi_j \triangleq \left[\begin{array}{c|cc} & \mathbf{0} & -B_{wj} \\ \Xi_j & -(L'C'_j + Z'D'_j) & \mathbf{0} \\ & -(L'C'_{hj} + Z'_h D'_{hj}) & \mathbf{0} \\ \hline \star & -\beta \mathbf{I}_p & -D_{wj} \\ & \star & -\mu \mathbf{I}_\ell \end{array} \right] < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N, \quad (5.44)$$

com Ξ_j dado em (5.23), então os ganhos robustos de realimentação de estados K e K_h dados por (5.24) são tais que a malha fechada do sistema $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$ é robustamente estável com custo garantido \mathcal{H}_∞ dado por γ , independentemente do valor h do atraso de tempo.

Prova: Note-se que se (5.44) é verificada, então existe δ , tal que $\delta^2 - 2\delta = -\beta$. Como $0 < \beta \leq 1$, δ é restrito ao intervalo aberto $]0, 2[$. Trocando $-\beta \mathbf{I}_p$ por $(\delta^2 - 2\delta) \mathbf{I}_p$ em Π_j , considerando-se as equações de malha fechada (5.7)-(5.8), escrevendo-se a partir de (5.24) que $Z = KL$ e $Z_h = K_h L$ e multiplicando-se o lado esquerdo de (5.44) à esquerda por \tilde{W} e à direita por \tilde{W}' com

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} W & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} X & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_\ell \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

em que W é definido em (5.25) e

$$X = \frac{1}{\delta} \mathbf{I}_p \quad (5.45)$$

obtem-se

$$\tilde{W} \Pi_j \tilde{W}' = \left[\begin{array}{c|cc} & \mathbf{0} & -FB_{wj} \\ \mathcal{M}_j & -(C'_j + D'_j)X' & \mathbf{0} \\ & -(C'_{hj} + D'_{hj})X' & \mathbf{0} \\ \hline \star & X(\delta^2 + 2\delta)X' & -XD'_{wj} \\ & \star & -\mu \mathbf{I}_\ell \end{array} \right] < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N, \quad (5.46)$$

em que \mathcal{M}_j é dado em (5.21) e $G = H = \mathbf{0}$. Além disso, o bloco (4, 4) em (5.46) pode ser reescrito como

$$X(\delta^2 + 2\delta)X' = \frac{1}{\delta}(\delta^2 + 2\delta)\frac{1}{\delta}\mathbf{I}_p = (1 + 2/\delta)\mathbf{I}_p = \mathbf{I}_p + \frac{1}{\delta}\mathbf{I}_p + \frac{1}{\delta}\mathbf{I}_p = \mathbf{I}_p + X + X' \quad (5.47)$$

com X dado em (5.45). A partir de (5.46), pode-se recuperar a condição (5.38), com $F_2 = G_2 = H_2 = \mathbf{0}$, $X_1 = \mathbf{0}$, $M_1 = \mathbf{0}$, $F = (L')^{-1}$ e $X_2 = X$. ■

Como feito no caso da estabilização robusta, Seção 5.3, é possível tratar sistemas variantes no tempo, bastando-se para isso considerar matrizes fixas e independentes de parâmetro no funcional de Lyapunov-Krasovskii. O corolário seguinte fornece uma condição suficiente para a estabilização quadrática, assegurando-se um custo garantido \mathcal{H}_∞ dado por γ para o sistema $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$ com parâmetro variante no tempo e atraso fixo.

Corolário 5.5 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\tilde{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times m_1}$, $Z_h \in \mathbb{R}^{n \times m_2}$, e escalares $0 < \beta \leq 1$ e $\gamma = \sqrt{\mu}$, tais que*

$$\Pi_j^q \triangleq \left[\begin{array}{c|cc} & \mathbf{0} & -B_{wj} \\ \Xi_j^q & -(L'C'_j + Z'D'_j) & \mathbf{0} \\ & -(L'C'_{hj} + Z'_h D'_{hj}) & \mathbf{0} \\ \hline \star & -\beta \mathbf{I}_p & -D_{wj} \\ & \star & -\mu \mathbf{I}_\ell \end{array} \right] < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N, \quad (5.48)$$

então os ganhos robustos de realimentação de estado K e K_h dados por (5.24) são tais que o sistema em malha fechada $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$ é quadraticamente estável com um custo garantido \mathcal{H}_∞ dado por γ , independentemente do valor h do atraso de tempo.

A escolha $L = -(\tilde{P} + \tilde{S})$ no Corolário 5.5 também resulta em uma condição de estabilização com custo garantido \mathcal{H}_∞ dado por γ .

Corolário 5.6 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\tilde{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times m_1}$, $Z_h \in \mathbb{R}^{n \times m_2}$, e escalares $0 < \beta \leq 1$ e $\gamma = \sqrt{\mu}$, tais que*

$$\left[\begin{array}{c|cc} \Xi_j^{q2} & \mathbf{0} & -B_{wj} \\ \hline \tilde{P}C'_j + \tilde{S}C'_j + Z'D'_j & \mathbf{0} & \\ \tilde{P}C'_{hj} + \tilde{S}C'_{hj} + Z'_h D'_{hj} & \mathbf{0} & \\ \hline \star & -\beta \mathbf{I}_p & -D_{wj} \\ & \star & -\mu \mathbf{I}_\ell \end{array} \right] < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (5.49)$$

com Ξ_j^{q2} definido em (5.28), então os ganhos robustos de realimentação de estados K e K_h dados por (5.29) são tais que o sistema em malha fechada $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$ é quadraticamente estável com um custo garantido \mathcal{H}_∞ dado por γ , independentemente do valor h do atraso de tempo.

Como observado anteriormente, as condições propostas no Corolário 5.5 são mais adequadas para tratar restrições estruturais nos ganhos de controle do que as condições do Corolário 5.6, devido ao grau extra de liberdade proporcionado pela matriz L .

É importante mencionar que o Teorema 5.6 fornece uma solução convexa na forma de LMI com dimensão finita para o Problema 5.2, que pode ser avaliada em tempo polinomial por meio de algoritmos especializados de pontos interiores [GNLC95]. Além disso, todas as matrizes do sistema podem ser afetadas pelas incertezas. Os ganhos de realimentação de estados K e K_h que proporcionam o menor nível de atenuação $\gamma = \sqrt{\mu}$, tal que (5.44) é verificada, podem ser obtidos a partir do seguinte problema convexo de otimização:

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{H}_\infty} : \begin{cases} \min & \mu \\ \tilde{P}_j = \tilde{P}'_j > \mathbf{0}; \quad \tilde{S}_j = \tilde{S}'_j > \mathbf{0} \\ Z, Z_h, L, 0 < \beta \leq 1 \\ \text{tal que (5.44) seja verificada} \end{cases} \quad (5.50)$$

5.6 Complexidade numérica e extensões

As condições propostas neste capítulo podem ser resolvidas em tempo polinomial por meio do uso de algoritmos de pontos interiores, cuja complexidade numérica é associada ao número de linhas LMI, \mathcal{L} , e ao número de variáveis escalares, \mathcal{K} , envolvidas no problema. Por exemplo, usando o *LMI Control Toolbox* o número de operações em ponto flutuante é da ordem de $\mathcal{K}^3 \mathcal{L}$ [GNLC95]. Outros métodos podem ter um comportamento diferente. Na Tabela 5.1, são dados o número de variáveis escalares, \mathcal{K} , e o número de linhas LMI, \mathcal{L} , associados a cada condição apresentada neste capítulo. Observe-se que nos problemas de otimização $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_\infty}$, (5.42), e $\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{H}_\infty}$, (5.50), o número de variáveis de otimização mostrado na Tabela 5.1 precisa ser acrescido de um, pois neste caso a variável $\mu = \gamma^2$ é também uma variável de otimização.

		Condição	\mathcal{K} (variáveis escalares)	\mathcal{L} (linhas LMI)
Análise	Estabilidade	Teorema 5.2	$3n^2 + Nn(n+1)$	$3Nn$
		Corolário 5.1	$n(n+1)$	
	\mathcal{H}_∞	Teorema 5.5	$n^2(3+N) + n(p+N) + \ell(n+p) + p(3n+p)$	$N(3n+p+\ell)$
		Corolário 5.4	$n(n+1)$	
Síntese	Estabilidade	Teorema 5.3	$n(N(n+1) + n + m_1 + m_2)$	$3Nn$
		Corolário 5.2	$n(2n + m_1 + m_2 + 1)$	
		Corolário 5.3	$n(n + m_1 + m_2 + 1)$	
	\mathcal{H}_∞	Teorema 5.6	$1 + n(N(n+1) + n + m_1 + m_2)$	$N(3n+p+\ell)$
		Corolário 5.5	$1 + n(2n + m_1 + m_2 + 1)$	
		Corolário 5.6	$1 + n(n + m_1 + m_2 + 1)$	

Tabela 5.1: Número de variáveis escalares, \mathcal{K} , e número de linhas LMI, \mathcal{L} .

5.6.1 Controle descentralizado

Os resultados apresentados nas Seção 5.4 (Teorema 5.3 e Corolário 5.2) e na Seção 5.5 (Teorema 5.6 e Corolário 5.5) podem também ser usados para a síntese de controle descentralizado, pela imposição de uma estrutura descentralizada às matrizes $L = L_D = \text{bloco-diagonal}\{L^1, \dots, L^M\}$, $Z = Z_D = \text{bloco-diagonal}\{Z^1, \dots, Z^M\}$, $Z_h = Z_{dD} = \text{bloco-diagonal}\{Z_h^1, \dots, Z_h^M\}$, em que M denota o número de subsistemas, resultando nos ganhos de realimentação de estados bloco-diagonais $K_D = Z_D L_D^{-1}$ e $K_{dD} = Z_{dD} L_D^{-1}$. Note-se que neste caso nenhuma restrição estrutural é imposta às matrizes $P(\alpha)$ e $S(\alpha)$ usadas no funcional de Lyapunov-Krasovskii. Além disso, é possível procurar por leis de controle que utilizem apenas $x(k)$ ou $x(k-h)$ para a realimentação, descentralizadas ou não, simplesmente fixando $Z = \mathbf{0}$ ou $Z_h = \mathbf{0}$ nas LMIs.

5.6.2 Falhas de atuadores

Os resultados apresentados neste capítulo podem ser usados para investigar a estabilidade robusta e para a síntese de ganhos robustos para realimentação de estados assegurando a estabilidade e o desempenho do sistema em malha fechada sob falhas de atuadores. De fato, o problema de falha de atuadores pode ser tratado como um caso especial de incerteza afetando as matrizes de entrada $B(\alpha)$ e $B_h(\alpha)$. Além disso, usando-se os resultados baseados na estabilidade quadrática, isto é, fixando-se as matrizes de Lyapunov-Krasovskii, falhas de atuadores podem ser tratadas no contexto de sistemas variantes no tempo,

assegurando estabilidade robusta e desempenho \mathcal{H}_∞ garantido mesmo sob falhas parciais ou totais de atuadores. Na Seção 5.7, alguns resultados sobre falha de atuadores em um sistema de tratamento térmico industrial são apresentados.

Observação 5.1 Condições para cômputo do custo garantido \mathcal{H}_∞ e para a síntese de ganhos robustos K e K_h , que minimizam a norma \mathcal{H}_∞ entre sinal de entrada de perturbação e o sinal de saída de sistemas lineares incertos discretos no tempo com atraso nos estados, porém sem atraso na equação de saída ($C_h = \mathbf{0}$ e $D_h = \mathbf{0}$), são investigadas em [LTP04a]. Nesse caso, as condições obtidas são mais simples que as apresentadas neste capítulo.

5.7 Exemplos

Exemplo 5.1 Como um primeiro exemplo, considere-se o sistema discreto no tempo com atraso nos estados, apresentado em [XLY01], em que uma representação de incerteza do tipo limitada em norma foi adotada e, usando condições dependentes do atraso, os autores concluem que o sistema é quadraticamente estável para $h = 2$. Esse sistema pode também ser representado como um sistema com atraso nos estados em um domínio de incertezas politópicas, usando as seguintes matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.545 & -0.430 \\ 0.185 & -0.610 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

$$A_{d1} = \begin{bmatrix} 0.240 & 0.070 \\ -0.120 & 0.090 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.455 & -0.370 \\ 0.215 & -0.590 \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

$$A_{d2} = \begin{bmatrix} 0.360 & 0.130 \\ -0.080 & 0.110 \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

Usando-se as condições proposta no Corolário 5.1, é possível concluir que esse sistema é, de fato, quadraticamente estável, independentemente do valor do atraso de tempo h , o que é assegurado pelas seguintes matrizes de Lyapunov-Krasovskii

$$P = \begin{bmatrix} 0.5682 & -0.0411 \\ -0.0411 & 0.9707 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0.3729 & -0.0203 \\ -0.0203 & 0.4023 \end{bmatrix}$$

Este exemplo simples ilustra como condições independentes do atraso podem fornecer resultados menos conservadores que os obtidos por meio de condições dependentes do atraso, para alguns sistemas.

Exemplo 5.2 Um exemplo fisicamente motivado é considerado e uma investigação detalhada a respeito de diferentes estratégias de controle é apresentada. Esse exemplo consiste de um modelo no espaço de estados de quinta ordem de um aquecedor elétrico industrial estudado em [CSH93] e [Chu95]. O aquecedor elétrico é dividido em cinco zonas de aquecimento, cada uma com um termopar e um aquecedor elétrico, conforme ilustrado na Figura 5.1. As variáveis de estado são as temperaturas em cada zona (x_1, \dots, x_5) ,

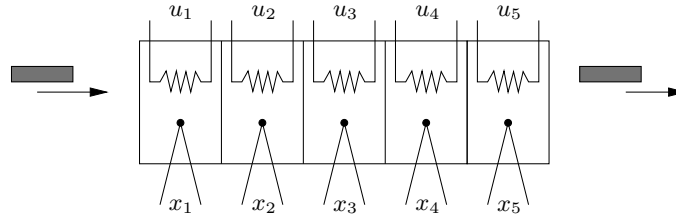


Figura 5.1: Diagrama esquemático do aquecedor elétrico industrial.

medidas pelos termopares, e as entradas de controle são os sinais elétricos de potência (u_1, \dots, u_5) , aplicados a cada um dos aquecedores elétricos.

A temperatura em cada zona do processo precisa ser controlada. A dinâmica desse sistema é lenta e sujeita a diversas perturbações de carga (veja [CSH93] para detalhes). Um modelo linear com estados atrasados para esse sistema foi obtido em [CSH93], usando-se uma técnica de identificação baseada em mínimos quadrados recursivos, sendo dado por

$$x(k+1) = Ax(k) + A_h x(k-h) + Bu(k) \quad (5.55)$$

com $h = 15$ e

$$A = \begin{bmatrix} 0.97421 & 0.15116 & 0.19667 & -0.05870 & 0.07144 \\ -0.01455 & 0.88914 & 0.26953 & 0.11866 & -0.22047 \\ 0.06376 & 0.12056 & 1.00049 & -0.03491 & -0.02766 \\ -0.05084 & 0.09254 & 0.28774 & 0.82569 & 0.02570 \\ 0.01723 & 0.01939 & 0.29285 & 0.03544 & 0.87111 \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

$$A_d = \begin{bmatrix} -0.01000 & -0.08837 & -0.06989 & 0.18874 & 0.20505 \\ 0.02363 & 0.03384 & 0.05282 & -0.09906 & -0.00191 \\ -0.04468 & -0.00798 & 0.05618 & 0.00157 & 0.03593 \\ -0.04082 & 0.01153 & -0.07116 & 0.16472 & 0.00083 \\ -0.02537 & 0.03878 & -0.04683 & 0.05665 & -0.03130 \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.53706 & -0.11185 & 0.09978 & 0.04652 & 0.25867 \\ -0.51718 & 0.73519 & 0.57518 & 0.40668 & -0.12472 \\ 0.29469 & 0.31528 & 1.16420 & -0.29922 & 0.23883 \\ -0.20191 & 0.19739 & 0.41686 & 0.66551 & 0.11366 \\ -0.11835 & 0.16287 & 0.20378 & 0.23261 & 0.36525 \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

Estabilização robusta

O sistema (5.55)-(5.58), com modos instáveis, é considerado aqui como o sistema nominal. A síntese de ganho de realimentação de estado no contexto de controle ótimo foi tratada em [CSH93] e [Chu95], em que um sistema aumentado de ordem igual a 85 foi utilizado e um ganho de controle foi determinado pela solução de uma equação de Riccati. A extensão dessa abordagem para tratar restrições estruturais nos ganhos de realimentação de estados, falhas de atuadores ou a presença de incertezas não é imediata. Para considerar a presença de erros de identificação, mudanças em pontos de operação devido a variações externas de temperatura e tensão, o seguinte modelo linear incerto é considerado aqui

$$x(k+1) = A(\rho)x(k) + A_h(\eta)x(k-h) + B(\sigma)u(k) + B_h(\sigma)u_h(k) \quad (5.59)$$

com

$$A(\rho) = (1 + \rho) A \quad (5.60)$$

$$A_h(\eta) = (1 + \eta) A_h \quad (5.61)$$

$$B(\sigma) = (1 + \sigma) B \quad (5.62)$$

$$B_h(\sigma) = (1 + \sigma) B \quad (5.63)$$

e A , A_h e B dadas em (5.56)-(5.58), $|\rho| \leq 0.3$ e $|\eta| \leq 0.3$. É suposto, inicialmente, que o valor de σ representa uma pequena perturbação de $\pm 8\%$, isto é $|\sigma| \leq 0.08$. Este conjunto de incertezas define um politopo de incertezas com $N = 8$ vértices, dado por todas as combinações de valores extremos de ρ , η e σ . Note-se que, além da abordagem baseada em vetor de estados aumentado proposta em [Chu95] não ser diretamente aplicável a este caso, essa metodologia também não indica um caminho para obter ganhos descentralizados de realimentação de estados. Além disso, as condições de [Chu95] levam a uma condição de estabilização apenas para um valor exato de atraso.

Por outro lado, as condições estabelecidas no Teorema 5.3 podem ser usadas para a síntese de ganhos descentralizados K e K_h (pois o atraso $h = 15$ é conhecido), resolvendo-se o Problema 5.1. Em particular, considerando $B_h = B$ e impondo uma estrutura diagonal às matrizes Z , Z_h e L obtém-se

$$K = \text{diag}\{-1.3649, -1.2935, -0.6991, -0.5667, -2.4203\} \quad (5.64)$$

$$K_h = \text{diag}\{0.1256, 0.0293, -0.1387, -0.2400, -0.0355\} \quad (5.65)$$

As condições do Corolário 5.2 falham para a síntese deste tipo de ganho para o sistema em estudo. Mesmo se o atraso de tempo não for conhecido, as condições do Teorema 5.3 ainda podem ser utilizadas (com $Z_h = \mathbf{0}$) para a obtenção de um ganho robusto para a realimentação de estados nesse sistema, mas neste caso uma descentralização completa não pode ser obtida. Relaxando-se as condições de restrições estruturais, por exemplo, permitindo-se que o segundo bloco da matriz de ganhos K seja um bloco 2×2 , e denotando-se a estrutura desse ganho de realimentação de estados como sendo $\{1, 2, 1, 1\}$, o seguinte ganho de realimentação de estados sem memória é obtido por meio das condições do Teorema 5.3 (as condições do Corolário 5.2 falham, novamente, nesse caso)

$$K = \text{bloco-diag}\left\{-1.3944, \begin{bmatrix} -1.2662 & 0.6601 \\ -0.0107 & -1.0657 \end{bmatrix}, -0.6647, -2.0740\right\} \quad (5.66)$$

É necessário enfatizar que nenhuma informação a respeito do atraso $h = 15$ foi utilizada neste caso para o cômputo dos ganhos de realimentação, pois as condições LMI são independentes do atraso. Se o atraso for conhecido (como é o caso neste exemplo, $h = 15$), K_h dado por (5.65) pode ser usado desde que os estados $x(k - 15)$ estejam disponíveis para realimentação.

Controle robusto \mathcal{H}_∞

Suponha que o sistema incerto (5.59) seja afetado por um sinal exógeno $w(k) \in \mathbb{R}^\ell$, $|\sigma| \leq 0.42$ e que uma saída $z(k)$, também afetada pelo sinal $w(k)$, seja controlada, resultando no modelo seguinte

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\rho)x(k) + A_h(\eta)x(k-h) + B(\sigma)u(k) + B_h(\sigma)u_h(k) + B_w(\sigma)w(k) \\ z(k) &= C(\rho)x(k) + C_h(\rho)x(k-h) + D(\sigma)u(k) + D_h(\sigma)u_h(k) + D_w(\sigma)w(k) \\ x(k) &= 0, \quad k \leq 0 \end{aligned} \quad (5.67)$$

com $A(\rho)$, $A_h(\eta)$, $B(\sigma)$ e $B_h(\sigma)$ dadas em (5.60)-(5.63) e

$$C(\rho) = 0.03(1 + \rho)C \quad (5.68)$$

$$C_h(\rho) = 10C(\rho) \quad (5.69)$$

$$D(\sigma) = 0.01(1 + \sigma)D \quad (5.70)$$

$$D_h(\sigma) = 10D(\sigma) \quad (5.71)$$

$$B_w(\sigma) = (1 + \sigma)B_w \quad (5.72)$$

$$D_w(\sigma) = (1 + \sigma)D_w \quad (5.73)$$

com

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

$$B_w = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.2 \\ 0.0 & -0.2 & 0.0 \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

$$D_w = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

Como anteriormente, os parâmetros incertos ρ , η e σ definem um politopo de incertezas com $N = 8$ vértices dados por todas as combinações de valores extremos desses parâmetros. Para esse sistema, várias estratégias de controle foram investigadas, resolvendo o problema de otimização convexa $\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{H}_\infty}$ dado em (5.50), por meio das condições estabelecidas pelo Teorema 5.6 e pelos Corolários 5.5 e 5.6. Os resultados obtidos são mostrados na Tabela 5.2, na qual o tamanho de cada bloco na estrutura descentralizada de controle é indicado na primeira coluna. A partir desses resultados, pode ser inferido que existe uma necessidade de blocos maiores para as primeiras zonas do aquecedor. Como esperado, o uso de K_h , isto é, dos estados atrasados, na realimentação proporciona menores níveis de atenuação \mathcal{H}_∞ . Além disso, os resultados obtidos por meio do uso do funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetro são melhores do que os obtidos por meio da estabilidade quadrática (isto é, com um funcional de Lyapunov-Krasovskii fixo). Note-se ainda que os resultados proporcionados pelos Corolários 5.5 e 5.6 são os mesmos quando um ganho de estrutura cheia (ou completa) é usado. O grau extra de liberdade advindo da matriz L no Corolário 5.6 torna-se importante quando uma restrição de estrutura é imposta. Finalmente, note-se que apenas o Teorema 5.6 com K e K_h conseguiu fornecer ganhos de realimentação de estados para as estruturas $\{3, 2\}$ e $\{3, 1, 1\}$.

Cômputo do custo garantido \mathcal{H}_∞

A fim de ilustrar a utilização das condições para o cômputo do custo garantido \mathcal{H}_∞ , foram feitos quatro testes numéricos utilizando-se o sistema incerto (5.67). Esse sistema incerto foi testado em malha fechada,

Estrutura	u e u_h			u		
	T6	C5	C6	T6	C5	C6
$\{3,1,1\}$	18.76	—	—	—	—	—
$\{3,2\}$	10.20	—	—	—	—	—
$\{2,3\}$	—	—	—	—	—	—
$\{4,1\}$	5.34	7.38	—	7.61	10.31	—
$\{1,4\}$	—	—	—	—	—	—
$\{5\}$	3.50	3.73	3.73	4.87	5.29	5.29

Tabela 5.2: Custos garantidos \mathcal{H}_∞ para o sistema (5.67) obtidos por meio do Teorema 5.6 (T6), do Corolário 5.5 (C5) e do Corolário 5.6 (C6) para diferentes estruturas bloco-diagonais. O símbolo ‘—’ significa que não foi obtida solução factível.

utilizando *i*) apenas um ganho K e *ii*) ganhos K e K_h . Cada um desses ganhos foi obtido resolvendo-se o problema de otimização convexa $\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{H}_\infty}$, dado em (5.50), aplicado *a*) às condições do Teorema 5.6 e *b*) às condições do Corolário 5.5, sem imposição de estrutura. Os custos garantidos para esses casos foram apresentados na última linha da Tabela 5.2 (e repetidos na primeira linha da Tabela 5.3). Os custos garantidos \mathcal{H}_∞ para o sistema em malha fechada foram obtidos por meio da solução do problema de otimização convexa $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_\infty}$ dado em (5.42) aplicado às condições do Teorema 5.5 e do Corolário 5.4. Os resultados encontrados são apresentados na Tabela 5.3. Na última linha dessa tabela, são fornecidos os valores de pior caso determinados por meio de uma malha fina realizada sobre o politopo do sistema em malha fechada.

Critério	u e u_h		u	
	(T6)	(C5)	(T6)	(C5)
Síntese	3.4981	3.7331	4.8784	5.2928
Corolário 5.4	46.9718	3.7330	6.5406	5.2929
Teorema 5.5	2.4931	3.3938	4.2406	4.9297
Malha fina	2.4739	3.3934	4.2360	4.9261

Tabela 5.3: Custos garantidos \mathcal{H}_∞ para o sistema (5.67), em malha fechada, com ganhos robustos K ou K e K_h , calculados por meio do Teorema 5.6 (T6) e do Corolário 5.5 (C5). Os custos garantidos \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada foram obtidos por meio da solução do problema de otimização $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_\infty}$ aplicado ao Teorema 5.5 e ao Corolário 5.4.

Observa-se que as condições do Teorema 5.5 se aproximam melhor do valor de pior caso em todas as situações, chegando, no melhor caso, a um erro da ordem de 10^{-4} para a realimentação de K e K_h projetados por meio da abordagem quadrática (Corolário 5.5). O erro de estimação do custo \mathcal{H}_∞ em relação ao pior caso (obtido por malha fina) por meio do Teorema 5.5 ficou entre 0.01% e 0.78%. Como esperado, as estimativas de custo garantido \mathcal{H}_∞ obtidas por meio do Corolário 5.5, baseadas na estabilidade quadrática, são sempre piores que as encontradas por meio do Teorema 5.5, apresentando um erro em relação ao valor de pior caso (obtido por malha fina) entre 7.4% e 1798.7%. Esse último valor

indica que a estabilização fornecida pelos ganhos K e K_h fornecidos pelo Teorema 5.5 deixam o sistema em malha fechada próximo ao limite de detecção de estabilidade quadrática.

Falha de atuadores

A síntese de ganhos robustos para realimentação de estados sob falha de atuadores é investigada nesta seção. De fato, é de grande interesse assegurar a estabilidade robusta e preservar níveis adequados de desempenho do sistema em malha fechada, mesmo na presença de falhas parciais ou totais de atuadores. Para isso, as i -ésimas colunas da matriz de entrada B , equação (5.58), e da matriz de transmissão direta D , equação (5.75), foram multiplicadas por $(1 - f)$, $f \in [0, 1]$, para $i = 1, \dots, 5$, representando desde a ocorrência de uma falha total ($f = 1$) até o funcionamento normal ($f = 0$) do i -ésimo atuador. Esse procedimento leva a uma representação politópica com $N = 16$ vértices.

Os resultados obtidos estão mostrados na Figura 5.2. Para cada atuador o custo garantido \mathcal{H}_∞ foi computado por meio do Teorema 5.6 e do Corolário 5.5, usando-se em um caso, os ganhos K e K_h e, no outro caso, apenas o ganho K , para falhas no atuador variando de 0% a 100%.

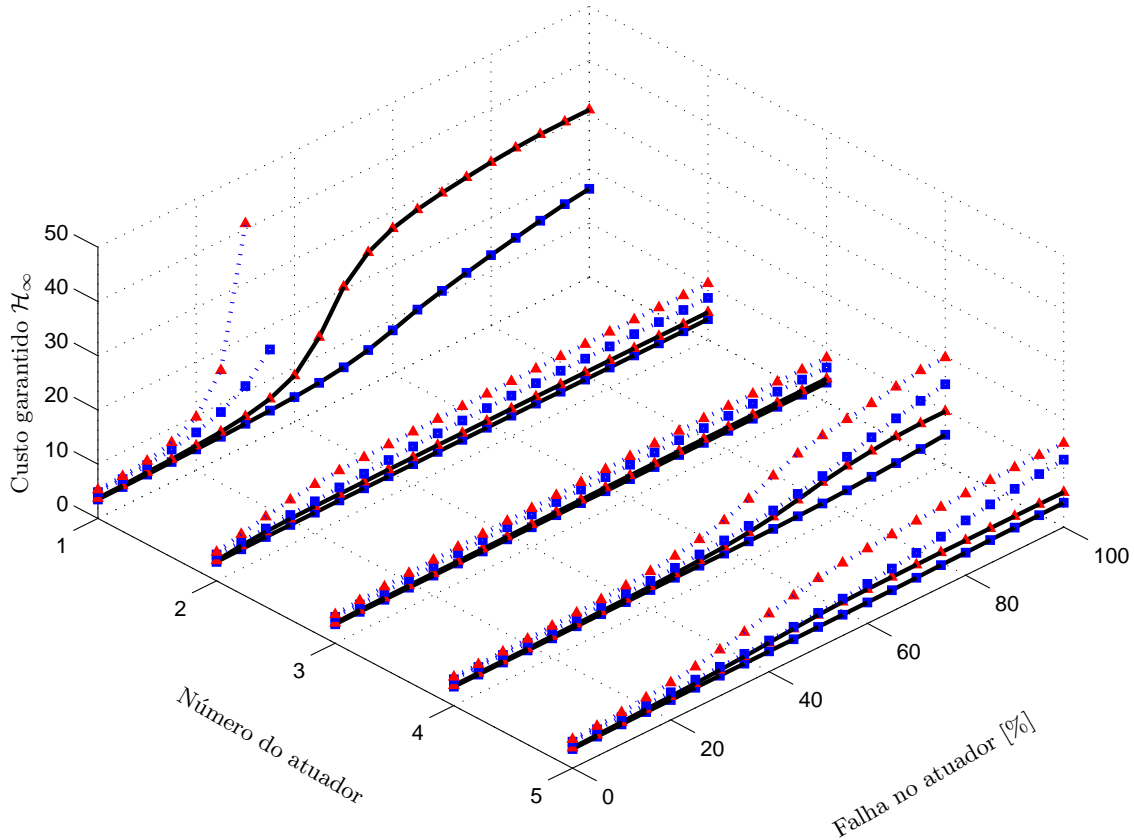


Figura 5.2: Custo garantido \mathcal{H}_∞ alcançado pelas condições do Teorema 5.6 (■) e pelas condições do Corolário 5.5 (▲) no caso de falhas individuais de atuadores, usando K e K_h (linhas contínuas) ou apenas o ganho K (linhas pontilhadas).

Novamente, as condições do Teorema 5.6 fornecem resultados menos conservadores, sendo que os melhores resultados são sempre obtidos quando K e K_h são ambos usados. Pode-se notar que o custo garantido \mathcal{H}_∞ é fortemente influenciado por falhas no primeiro atuador.

5.8 Conclusões

O controle robusto \mathcal{H}_∞ para sistemas discretos no tempo com atraso nos estados foi investigado neste capítulo. Diferentemente de outros resultados da literatura, todas as matrizes do sistema podem ser afetadas por incertezas. Tais incertezas são expressas na forma politópica, com vértices conhecidos. Por meio do uso de um funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetro, condições do tipo “independente do atraso”, menos conservadoras, foram obtidas na forma de LMIs para a análise de estabilidade robusta e para o cálculo do custo garantido \mathcal{H}_∞ . Além disso, condições do tipo LMI, suficientes para o cálculo de ganhos robustos de realimentação de estado para a estabilização e para o controle com custo garantido \mathcal{H}_∞ foram apresentadas. Essas condições podem fornecer um ganho que depende de estados atrasados, utilizável sempre que o valor do atraso for conhecido. Graças à convexidade, restrições adicionais, tais como descentralização e controle sob falhas de atuadores, podem ser facilmente incorporadas às condições LMI. A capacidade e a eficácia das condições propostas foram ilustradas por meio de exemplos, incluindo-se a síntese de controle robusto para um aquecedor industrial.

Capítulo 6

Considerações finais

Neste trabalho, foram estudados funcionais de Lyapunov e de Lyapunov-Krasovskii dependentes de parâmetro, utilizados para tratar problemas no contexto da teoria de controle robusto. Com a utilização desses funcionais, foi possível obter condições, formuladas como testes de factibilidade de LMIs, que apresentam resultados bem menos conservadores que outras condições encontradas na literatura para sistemas com incertezas do tipo politópica. Foram obtidas formulações convexas, de dimensão finita no parâmetro de incerteza, (suficientes) para a solução dos seguintes problemas:

- \mathcal{D} -estabilidade robusta de politopos de matrizes;
- \mathcal{D} -estabilidade robusta de politopos de polinômios matriciais;
- estabilidade robusta de sistemas neutrais com atrasos variantes no tempo e, em particular, de sistemas com atraso nos estados;
- estabilidade robusta de sistemas discretos no tempo com atraso nos estados;
- cálculo do custo garantido \mathcal{H}_∞ de sistemas discretos no tempo com atraso nos estados e na saída;
- síntese de ganhos de realimentação de estados para sistemas discretos no tempo com atraso nos estados, assegurando um desempenho \mathcal{H}_∞ .

Partes dos resultados apresentados neste texto aparecem nos trabalhos [dOLP04], [dOOL⁺02a], [LP03b], [LPT03], [dOOL⁺02b], [LMd⁺04], [LMRP02], [LOdP04], [LP03a], [LTP], [LTP04b], [LTP04a] e [PTGL03].

Pode-se concluir que, a utilização de funções de Lyapunov e de Lyapunov-Krasovskii dependentes de parâmetros aliada à aplicação do Lema de Finsler nos problemas estudados leva a uma redução significativa do conservadorismo das condições de análise de estabilidade robusta e de síntese robusta. Essa redução de conservadorismo ocorre às custas de um aumento de complexidade das condições que envolvem funcionais dependente de parâmetros, bem como matrizes extras dependentes ou não de parâmetro, em relação às condições LMIs correspondentes, formuladas através da abordagem por estabilidade quadrática, isto é, utilizando funcionais de Lyapunov e Lyapunov-Krasovskii com matrizes fixas e independentes de parâmetro. Porém, o esforço computacional adicional, necessário às condições propostas neste trabalho, mostra-se compensador conforme demonstrado em comparações numéricas e exemplos apresentados. Observa-se ainda que, as condições LMI podem ser resolvidas através de outros algoritmos especializados, tais como [Stu99], além dos algoritmos de pontos interiores utilizados neste trabalho [GNLC95].

6.1 Outros trabalhos realizados

Outros resultados obtidos durante o período de doutorado e que possuem conexões com as técnicas e problemas abordados nesta tese são relacionados na seqüência, junto com os resumos correspondentes.

[LMP02] “Robust pole location by parameter dependent state feedback control”

São propostas condições suficientes para a existência de um ganho robusto para a realimentação de estados, assegurando à malha fechada de um sistema linear incerto a alocação robusta de pólos dentro de uma região circular do semi-plano esquerdo complexo. As incertezas são supostas pertencentes a um domínio politópico descrito por um conjunto finito de vértices. A condição de estabilização é formulada em termos de um conjunto de LMIs definidas pelos vértices do politopo. Extensões para tratar os casos de controle descentralizado e realimentação estática de saída são também apresentadas.

[LMPJ02] “Robust pole location for an interacting tank system with uncertain parameters”

Nesse trabalho o problema de projeto de controle robusto através de realimentação de estados para o modelo de um sistema de tanque interativos é estudado. Especificamente, é investigado o projeto de controladores que assegurem a localização robusta dos pólos de malha fechada dentro de uma região circular do semi-plano esquerdo do plano complexo. O sistema de tanques interativos é uma planta piloto com sensores e atuadores industriais. Supõem-se que os parâmetros do modelo do sistema de tanques interativos variam como uma função dos pontos de operação, sendo, portanto, parâmetros incertos que podem ser descritos por politopos convexos. Três condições suficientes para a existência de um ganho robusto de realimentação de estados são apresentadas: o ganho baseado na estabilidade quadrática, uma condição já publicada que usa um espaço de estados aumentado e, por último, uma condição que usa um número maior de equações. Essa última, proporciona um ganho de realimentação de estados dependente do parâmetro que assegura ao sistema incerto em malha fechada a localização dos pólos dentro de um círculo pré-especificado do semi-plano complexo esquerdo. As condições para a estabilizabilidade robusta são formuladas em termos de um conjunto de LMIs envolvendo apenas os vértices do politopo de incertezas. O ganho dependente de parâmetro proposto, permite impor aos pólos de malha fechada do sistema localizações que em algumas situações não podem ser obtidas com ganhos de realimentação constantes (independentes de parâmetro).

[LP02] “Robust pole location for an active suspension quarter-car model through parameter dependent control”

O problema de projeto de um ganho de realimentação de estados para controle robusto de um modelo de uma suspensão ativa de “um quarto de carro” é tratado nesse trabalho. São dadas condições suficientes para a existência de uma lei de controle dependente de parâmetros estabilizante que assegure ao sistema de malha fechada a alocação robusta de seus pólos em uma região circular do semi-plano esquerdo complexo. A massa suspensa é considerada como um parâmetro incerto pertencente a um politopo. A condição de estabilização robusta é formulada em termos de um conjunto de LMIs envolvendo apenas os vértices do politopo de incertezas. É feita uma comparação com resultados recentes que utilizam a abordagem clássica LQR para ilustrar o método proposto.

[LP05] “Pole location control design of an active suspension system with uncertain parameters”

Nesse trabalho são estendidos os resultados apresentados em [LP02], tratando com maiores detalhes o modelo de suspensão de um quarto de carro. A alocação robusta dos pólos de malha fechada no interior de uma região circular do semi-plano esquerdo é investigada. As três condições de síntese apresentadas em [LP02] são retomadas. Nesse trabalho são considerados incertos: a massa suspensa, o coeficiente de amortecimento e a constante de elasticidade da mola. Todos esses parâmetros são considerados pertencentes a um politopo de vértices conhecidos.

[LP04] “Robust control through piecewise Lyapunov functions for discrete time-varying uncertain systems”

Nesse trabalho é estudada a estabilização robusta por realimentação de estados de sistemas lineares discretos no tempo com parâmetros incertos variantes no tempo. Um problema de otimização envolvendo um conjunto de LMIs e parâmetros de escalamento proporcionam tanto um ganho robusto de realimentação de estados quanto uma função de Lyapunov quadrática por partes, usada para assegurar a estabilidade do sistemas em malha fechada. No caso de sistemas lineares variantes no tempo envolvendo apenas a combinação convexa de duas matrizes, apenas dois parâmetros de escalamento são necessários, permitindo uma solução numérica eficiente.

[MLP03] “Discrete-time switched systems: pole location and structural constrained control”

Nesse trabalho, o problema de controle por realimentação de estado de sistemas chaveados discretos no tempo com modos lineares de operação é tratado. Condições LMIs suficientes para a existência de uma lei de controle por realimentação de estados são propostas assegurando: *i)* a alocação dos pólos de malha fechada dentro de uma região circular específica para cada modo linear de operação; *ii)* estabilidade do sistema para qualquer seqüência arbitrariamente rápida de chaveamento. Duas leis de controle por realimentação são investigadas: a primeira com um ganho fixo para todos os modos lineares e a segunda usando um ganho chaveado. Além disso, restrições estruturais tais como descentralização podem ser facilmente impostas aos ganhos de realimentação de estados. Resultados de simulação mostram que, especificações de projeto mais rigorosas podem ser impostas ao sistema em malha fechada quando o ganho chaveado é utilizado, proporcionando desempenhos em malha fechada que não podem ser produzidos por meio de ganho constante de realimentação.

[MLTP05] “Stability and stabilizability of discrete-time switched linear systems with state delay”

Os problemas de estabilidade e estabilizabilidade de sistemas chaveados lineares discretos no tempo cujos subsistemas dependem de estados atrasados são investigados nesse trabalho, usando LMIs. As condições propostas, baseadas em funcionais de Lyapunov-Krasovskii, asseguram a estabilidade do sistema para funções arbitrárias de chaveamento, independentemente do valor do atraso de tempo. A função de chaveamento é suposta desconhecida *a priori*, mas disponível em tempo real. Os estados e os estados atrasados são supostos disponíveis para realimentação. As condições propostas podem reduzir o conservadorismo da análise e, graças a variáveis extras, podem ser estendidas para fins de projeto, proporcionando ganhos chaveados para o controle por realimentação estados que contêm os ganhos fixos obtidos através da estabilização quadrática.

[MLP04] “Design of a switched control with pole location constraints for a UPS system”

Neste trabalho é estudado o projeto de um controlador chaveado que garante um desempenho

baseado em especificações de alocação de pólos para uma fonte ininterrupta de energia com uma carga típica. Condições suficientes em termos de LMIs são apresentadas para determinar uma lei de controle chaveada que assegura: *i*) a localização dos pólos de cada modo linear de operação dentro de um círculo, melhorando a resposta transitória quando o chaveamento permite uma acomodação da dinâmica do sistema; *ii*) a estabilidade do sistema chaveado para qualquer sequência arbitrariamente rápida de chaveamento. Restrições estruturais tais como descentralização são também estudadas e os resultados de simulações mostram que a estratégia de controle chaveado permite impor especificações de projeto mais exigentes para a malha fechada do sistema ininterrupto de energia, proporcionando desempenhos dinâmicos que não podem ser alcançados por meio de um ganho de realimentação fixo.

[MLOP04] “Controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados linear variante com parâmetros: uma abordagem LMI”

Neste artigo são apresentadas condições suficientes para a existência de um ganho de realimentação de estados linear variante com parâmetros capaz de estabilizar e de garantir um nível de atenuação \mathcal{H}_∞ para um sistema linear variante no tempo pertencente a um politopo conhecido. Os parâmetros do sistema são considerados mensuráveis em tempo real, suas taxas de variação são arbitrárias e, diferentemente de outras abordagens da literatura, todas as matrizes do sistema são afetadas por esses parâmetros. As condições de síntese do controlador são expressas na forma de desigualdades matriciais lineares, baseando-se em uma função de Lyapunov quadrática fixa para a determinação de um ganho dependente de parâmetros. Essa estratégia pode resultar em um melhor desempenho para o sistema quando comparada com técnicas de ganhos fixos vindas da estabilizabilidade quadrática, conforme mostram alguns exemplos numéricos.

[dOL⁺04a] “ \mathcal{H}_2 guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions”

Uma abordagem LMI para computar o custo garantido \mathcal{H}_2 através de funções de Lyapunov dependentes de parâmetro é apresentada. O sistema linear incerto e invariante no tempo é suposto pertencente a um domínio convexo (incerteza do tipo politópica). As condições propostas são menos conservadoras que outros métodos dependentes de parâmetro encontrados na literatura, determinando melhores estimativas de pior caso para a norma \mathcal{H}_2 tanto em sistemas contínuos no tempo quanto em sistemas discretos no tempo.

[dOL⁺04b] “ \mathcal{H}_∞ guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions”

Condições LMI para a determinação de um custo garantido \mathcal{H}_∞ de sistemas lineares incertos em domínios politópicos são apresentadas. As condições são baseadas em funções de Lyapunov dependentes de parâmetro. As condições propostas são menos conservadoras que outros métodos dependentes de parâmetro encontrados na literatura, podendo determinar melhores estimativas de custos garantidos \mathcal{H}_∞ .

[LMP04] “Alocação robusta de pólos através de realimentação de estados dependente de parâmetros”

Uma condição suficiente para a existência de uma realimentação de estados robusta dependente de parâmetros é apresentada. A condição é verificada através do teste de factibilidade de um conjunto de desigualdades matriciais lineares. A realimentação obtida garante ainda a alocação robusta dos pólos de malha fechada de sistemas lineares incertos em uma região circular do plano complexo, através da existência de uma função de Lyapunov dependente de parâmetros.

[MOLP05] “An LMI approach for \mathcal{H}_∞ linear parameter-varying state feedback control”

São dadas condições LMI para a existência de um ganho de realimentação de estados, dependente de parâmetro, para sistemas incertos contínuos variantes no tempo, pertencentes a domínios politópicos. Embora existam vários resultados tratando desse problema na literatura, até então todas as abordagens supõem que algumas das matrizes que descrevem o sistema precisam ser constantes ou precisam satisfazer alguma restrição estrutural. Neste trabalho, todas as matrizes do sistema são supostas incertas, variantes no tempo e nenhuma restrição estrutural é exigida. A estratégia proposta é muito mais simples que as técnicas baseadas em ganhos chaveados, sendo especialmente adequada para sistemas com parâmetros incertos para os quais os limites nas taxas de variação não existem ou são desconhecidos, como por exemplo em sistemas chaveados. Além disso, é possível também assegurar um nível de atenuação \mathcal{H}_∞ para o sistema em malha fechada sob taxas arbitrariamente rápidas de variação, melhorando significativamente os resultados baseados em ganhos fixos obtidos através de condições baseadas na estabilidade quadrática.

6.2 Perspectivas

A pesquisa realizada neste trabalho aponta alguns temas de interesse que podem ser explorados em novas investigações. A seguir são listados alguns desses temas, que parecem ser os mais promissores:

- Investigação de condições de \mathcal{D} -estabilidade de politopos de matrizes usando

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} R_{11} \otimes P(\alpha) \\ +F(\alpha)(\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')F(\alpha)' \\ \star \end{array} & \begin{array}{c} R_{12} \otimes P(\alpha) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')G(\alpha) - F(\alpha) \\ R_{22} \otimes P(\alpha) - (G(\alpha) + G(\alpha)') \end{array} \end{array} \right] < \mathbf{0}$$

com $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$, $\alpha_j \geq 0$ e majorando a equação acima por uma função polinomial em que o grau de α_j é maior que 3. Os resultados apresentados neste trabalho foram obtidos para graus de α_j iguais a 2 e 3. Para isso, deve-se expressar a condição acima, multiplicada por $(\sum_{j=1}^N \alpha_j)^v$, $v \in \mathbb{N}$. Espera-se que condições cada vez menos conservadoras sejam obtidas na medida em que v aumente.

- Investigar condições para a \mathcal{D} -estabilidade de politopos de polinômios matriciais usando regiões descritas por \mathcal{R} com dimensões maiores que 2. Esta investigação pode ainda envolver o estudo de outras matrizes de projeção \mathcal{T} , equação (3.11), na busca por condições menos conservadoras.

- Estudar a síntese de controladores para a estabilização robusta de politopos de polinômios matriciais.

- Desenvolver condições para o cômputo do custo garantido \mathcal{H}_∞ para sistemas neutrais, bem como condições para síntese de ganhos robustos para realimentação de estados que possam garantir *i)* a estabilidade e *ii)* um desempenho (custo garantido \mathcal{H}_∞) do sistema em malha fechada.

- Investigar condições dependentes do atraso, menos conservadoras, usando o Lema de Finsler, para sistemas discretos no tempo com atraso nos estados. Neste caso, uma necessária comparação com condições baseadas no aumento do vetor de estados deve ser realizada.

- Investigar o cômputo do custo \mathcal{H}_2 para sistemas com atraso nos estados.

- Investigar sistemas chaveados que possuam atraso nos estados e que possam ser tratados através de funções de Lyapunov-Krasovskii dependentes de parâmetro.

Referências Bibliográficas

- [Ack93] J. Ackermann. *Robust Control: Systems with Uncertain Parameters*. Springer Verlag, London, England, 1993.
- [ÅW84] K. J. Åström and B. Wittenmark. *Computer Controlled Systems: Theory and Design*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1984.
- [Bac98] O. Bachelier. *Commande des Systèmes Linéaires Incertains: Placement de Pôles Robuste en \mathcal{D} -Stabilité*. PhD thesis, INSA, Toulouse, Septembre 1998.
- [Bar85] B. R. Barmish. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 46(4):399–408, August 1985.
- [Bar94] B. R. Barmish. *New Tools for Robustness of Linear Systems*. Macmillan Publishing Company, New York, NY, EUA, 1994.
- [BCK95] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat, and L. H. Keel. *Robust Control: The Parametric Approach*. Prentice-Hall Publishing Co., Upper Saddle River, NJ, USA, 1995.
- [BEFB94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1994.
- [BGR99] A. Bellen, N. Guglielmi, and A. E. Ruehli. Methods for linear systems of circuit delay differential equations of neutral type. *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part I: Fundamental Theory and Applications*, 46(1):212–216, January 1999.
- [BHL88] A. C. Bartlett, C. V. Hollot, and H. Lin. Root locations of an entire polytope of polynomials: it suffices to check the edges. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 1:61–71, 1988.
- [Bli02] P.-A. Bliman. Lyapunov equation for the stability of linear delay systems of retarded and neutral type. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(2):327–335, February 2002.
- [Bli04a] P.-A. Bliman. A convex approach to robust stability for linear systems with uncertain scalar parameters. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 42(6):2016–2042, 2004.
- [Bli04b] P. A. Bliman. An existence result for polynomial solutions of parameter-dependent LMIs. *Systems & Control Letters*, 51(3-4):165–169, March 2004.

- [Bod45] H. W. Bode. *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. The Bell Telephone Laboratories Series. D. Van Nostrand Company, Inc., 1945.
- [BRT03] Y. Bin, Z. Ruijun, and L. Tao. Delay-dependent stability criterion for a class of neutral time-delay systems. In *Proceedings of the 2003 American Control Conference*, pages 2694–2696, Denver, CO, June 2003.
- [BS70] S. Barnett and C. Storey. *Matrix Methods in Stability Theory*. Applications of Mathematics Series. Thomas Nelson and Sons Ltd., 1970.
- [BT00] V. D. Blondel and J. N. Tsitsiklis. A survey of computational complexity results in systems and control. *Automatica*, 36(9):1249–1274, September 2000.
- [CC03] S.-H. Chen and J.-H. Chou. Stability robustness of linear discrete singular time-delay systems with structured parameter uncertainties. *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*, 150(3):295–302, May 2003.
- [CG96] M. Chilali and P. Gahinet. \mathcal{H}_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3):358–367, March 1996.
- [CGTV03] G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, and A. Vicino. Robust stability of polytopic systems via polynomially parameter-dependent Lyapunov functions. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4670–4675, Maui, HI, USA, December 2003.
- [CH04] D. Q. Cao and P. He. Stability criteria of linear neutral systems with a single delay. *Applied Mathematics and Computation*, 148(1):135–143, January 2004.
- [Che03] J.-D. Chen. New stability criteria for a class of neutral systems with discrete and distributed time-delays: an LMI approach. *Applied Mathematics and Computation*, 150(3):719–736, March 2003.
- [Che04] J.-D. Chen. Robust control for uncertain neutral systems with time-delays in state and control input via LMI and GAs. *Applied Mathematics and Computation*, 157(2):535–548, September 2004.
- [Chu95] J. Chu. Application of a discrete optimal tracking controller to an industrial electric heater with pure delays. *Journal of Process Control*, 5(1):3–8, 1995.
- [CRZ00] J. Cullum, A. Ruehli, and T. Zhang. A method for reduced-order modeling and simulation of large interconnect circuits and its application PEED models with retardation. *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part II: Analog and Digital Signal Processing*, 47(4):261–273, April 2000.
- [CSH93] J. Chu, H. Su, and X. Hu. A time-delay control algorithm for an industrial electric heater. *Journal of Process Control*, 3(4):219–224, November 1993.
- [DB01] J. Daafouz and J. Bernussou. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parameter uncertainties. *Systems & Control Letters*, 43(5):355–359, August 2001.

- [dOBG99] M. C. de Oliveira, J. Bernussou, and J. C. Geromel. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 37(4):261–265, July 1999.
- [dOGB02] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and J. Bernussou. Extended \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ characterization and controller parametrizations for discrete-time systems. *International Journal of Control*, 75(9):666–679, June 2002.
- [dOGH99] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and L. Hsu. LMI characterization of structural and robust stability: the discrete-time case. *Linear Algebra and Its Applications*, 296(1–3):27–38, June 1999.
- [dOL⁺04a] P. J. de Oliveira, R. C. L. Oliveria, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. \mathcal{H}_2 guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions. *International Journal of Systems Science*, 35(5):305–315, April 2004.
- [dOL⁺04b] P. J. de Oliveira, R. C. L. Oliveria, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. \mathcal{H}_∞ guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions. *Automatica*, 40(1):1053–1061, January 2004.
- [dOLP04] P. J. de Oliveira, R. C. L. Oliveria, V. J. S. Leite, and P. L. D. Peres. Condições LMI para estabilidade robusta de politopos de matrizes polinomiais. *SBA Controle & Automação*, 15(4):388–400, 2004.
- [dOOL⁺02a] P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. Estabilidade robusta de sistemas discretos no tempo através de desigualdades matriciais lineares. In *XIV Congresso Brasileiro de Automática*, pages 2884–2889, Natal, RN, Setembro 2002.
- [dOOL⁺02b] P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. LMI based robust stability conditions for linear uncertain systems: a numerical comparison. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 644–649, Las Vegas, December 2002.
- [dOP02] P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. A new LMI condition for robust stability of polynomial matrix polytopes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(10):1775–1779, October 2002.
- [dOS01] M. C. de Oliveira and R. E. Skelton. Stability tests for constrained linear systems. In S. O. Reza Moheimani, editor, *Perspectives in Robust Control*, Lecture Notes in Control and Information Science, pages 241–257. Springer-Verlag, 2001.
- [DV97] L. Dugard and E. I. Verriest, editors. *Stability and Control of Time-delay Systems*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1997.
- [El’66] L. E. El’sgol’ts. *Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Arguments*. Holden-Day, Inc., San Francisco, USA, 1966.

- [FAG96] E. Feron, P. Apkarian, and P. Gahinet. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(7):1041–1046, July 1996.
- [Fri01] E. Fridman. New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems. *Systems & Control Letters*, 43(4):309–319, July 2001.
- [FS03] E. Fridman and U. Shaked. An LMI approach to stability of discrete delay systems. In *Proceedings of the 2003 European Control Conference*, Cambridge, UK, September 2003.
- [Fu04] X. Fu. Controllability of abstract neutral functional differential systems with unbounded delay. *Applied Mathematics and Computation*, 151(2):299–314, April 2004.
- [GAC96] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3):436–442, March 1996.
- [GdOH98] J. C. Geromel, M. C. de Oliveira, and L. Hsu. LMI characterization of structural and robust stability. *Linear Algebra and Its Applications*, 285(1–3):69–80, December 1998.
- [GJ81] S. Gutman and E. I. Jury. A general theory for matrix root-clustering in subregions of the complex plane. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(4):853–863, August 1981.
- [GLR82] I. Gohberg, P. Lancaster, and L. Rodman. *Matrix Polynomials*. Academic Press, New York, NY, USA, 1982.
- [GN01] K. Gu and S.-I. Niculescu. Further remarks on additional dynamics in various model transformations of linear delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(3):497–500, March 2001.
- [GNLC95] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali. *LMI Control Toolbox User's Guide*. The Math Works Inc., Natick, MA, 1995.
- [Hal77] J. Hale. *Theory of Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [Han02] Q.-L. Han. Robust stability of uncertain delay-differential systems of neutral type. *Automatica*, 38(4):719–723, April 2002.
- [Han04] Q.-L. Han. A descriptor system approach to robust stability of uncertain neutral system with discrete and distributed delays. *Automatica*, 40(10):1791–1796, October 2004.
- [HAPŠ01] D. Henrion, D. Arzelier, D. Peaucelle, and M. Šebek. An LMI condition for robust stability of polynomial matrix polytopes. *Automatica*, 37(3):461–468, March 2001.
- [HB92] W. M. Haddad and D. S. Bernstein. Controller design with regional pole constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(1):54–69, January 1992.
- [HBŠ01] D. Henrion, O. Bachelier, and M. Šebek. \mathcal{D} -stability of polynomial matrices. *International Journal of Control*, 74(8):845–846, May 2001.

- [HD03] G. Hu and E. J. Davison. Real stability radii of linear time-invariant time-delay systems. *Systems & Control Letters*, 50(3):209–219, October 2003.
- [HL03] D. W. C. Ho and G. P. Lu. Robust stabilization for a class of discrete-time non-linear systems via output feedback: the unified LMI approach. *International Journal of Control*, 76(2):105–115, 2003.
- [HLP52] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2nd edition, 1952.
- [IND⁺03] D. Ivănescu, S.-I. Niculescu, L. Dugard, J.-M. Dion, and E. I. Verriest. On delay-dependent stability for linear neutral systems. *Automatica*, 39(2):255–261, February 2003.
- [Kai80] T. Kailath. *Linear System*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1980.
- [KH98] V. Kapila and W. M. Haddad. Memoryless \mathcal{H}_∞ controllers for discrete-time systems with time delay. *Automatica*, 34(9):1141–1144, 1998.
- [Kha78] V. L. Kharitonov. Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations. *Differentsial'nye Uravneniya*, 14:2086–2088, 1978.
- [KNR99] V. B. Kolmanovskii, S. I. Niculescu, and J. P. Richard. On the Liapunov-Krasovskii functionals for stability analysis of linear delay systems. *International Journal of Control*, 72(4):374–384, March 1999.
- [KP90] M. Kinnaert and Y. Peng. Discrete-time LQG/LTR technique for systems with time delays. *Systems & Control Letters*, 15(4):303–311, November 1990.
- [KP99] J. H. Kim and H. B. Park. \mathcal{H}_∞ state feedback control for generalized continuous/discrete time-delay system. *Automatica*, 35(8):1443–1451, August 1999.
- [KR99] V. B. Kolmanovskii and J. P. Richard. Stability of some linear systems with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(5):984–989, May 1999.
- [KR03] C.-Y. Kao and A. Rantzer. Stability criteria for systems with bounded uncertain time-varying delay. In *Proceedings of European Control Conference*, University of Cambridge, UK, 2003.
- [Kuč79] V. Kučera. *Discrete Linear Control: The Polynomial Equation Approach*. Wiley, Chichester, England, 1979.
- [KV93] W. C. Karl and G. C. Verghese. A sufficient condition for the stability of interval matrix polynomials. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(7):1139–1143, July 1993.
- [Las01] J. B. Lasserre. Global optimization with polynomials and the problem of moments. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 11(3):796–817, 2001.
- [LHLK92] C.-H. Lee, T. Hseng, S. Li, and F.-C. Kung. D-stability analysis for discrete systems with a time delay. *Systems & Control Letters*, 19(3):213–219, September 1992.

- [LKH04] Y.-S. Liu, C.-H. Fang S.-W. Kau, and L. Hong. An improved LMI-based \mathcal{D} -stability condition for polytopic uncertain systems. In *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer-Aided Control Systems Design*, pages 237–242, Taipei, Taiwan, September 2004.
- [LMd⁺04] V. J. S. Leite, V. F. Montagner, P. J. de Oliveira, R. C. L. Oliveria, D. C. W. Ramos, and P. L. D. Peres. Estabilidade robusta de sistemas lineares através de desigualdades matriciais lineares. *SBA Controle & Automação*, 15(1):24–40, Janeiro / Março 2004.
- [LMP02] V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. Robust pole location by parameter dependent state feedback control. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1864–1869, Las Vegas, December 2002.
- [LMP04] V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. Alocação robusta de pólos através de realimentação de estados dependente de parâmetros. *SBA Controle & Automação*, 15(2):127–134, Abril / Junho 2004.
- [LMPJ02] V. J. S. Leite, M. F. Miranda, P. L. D. Peres, and F. G. Jota. Robust pole location for an interacting tank system with uncertain parameters. In *Proceedings of the 2002 International Conference on Industrial Electronics, Control and Instrumentation*, volume 2, pages 1618–1623, Seville, Spain, November 2002.
- [LMRP02] V. J. S. Leite, V. F. Montagner, D. C. W. Ramos, and P. L. D. Peres. Estabilidade robusta de sistemas contínuos no tempo através de desigualdades matriciais lineares. In *Anais do XIV Congresso Brasileiro de Automática*, pages 2878–2883, Natal, RN, Setembro 2002.
- [LOdP04] V. J. S. Leite, R. C. L. F. Oliveira, P. J. de Oliveira, and P. L. D. Peres. \mathcal{D} -stability of polytopes of polynomial matrices: characterization through LMIs. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 863–868, Atlantis, Bahamas, December 2004.
- [LP02] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres. Robust pole location for an active suspension quarter-car model through parameter dependent control. In *Proceedings of the 2002 International Conference on Control Applications*, volume 1, pages 447–452, Glasgow, UK, September 2002.
- [LP03a] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres. An improved LMI condition for robust \mathcal{D} -stability of uncertain polytopic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(3):500–504, March 2003.
- [LP03b] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres. An improved LMI condition for robust \mathcal{D} -stability of uncertain polytopic systems. In *Proceedings of the 2003 American Control Conference*, pages 833–838, Denver, CO, June 2003.
- [LP04] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres. Robust control through piecewise Lyapunov functions for discrete time-varying uncertain systems. *International Journal of Control*, 77(3):230–238, February 2004.

- [LP05] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres. Pole location control design of an active suspension system with uncertain parameters. *Vehicle and System Dynamics*, 2005. Aceito para publicação.
- [LPT03] V. J. S. Leite, P. L. D. Peres, and S. Tarbouriech. Robust stability of time-delay continuous-time systems in polytopic domains. In *Proceedings of the 3rd IFAC International Workshop on Linear Time Delay Systems*, Rocquencourt, France, September 2003.
- [LTP] V. J. S. Leite, S. Tarbouriech, and P. L. Peres. Robust \mathcal{H}_∞ state feedback control of discrete-time systems with state delay: an LMI approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. Submitted for publication.
- [LTP04a] V. J. S. Leite, S. Tarbouriech, and P. L. Peres. Controle robusto \mathcal{H}_∞ de sistemas discretos com atraso nos estados: condições LMI independentes do atraso. In *Anais do XV Congresso Brasileiro de Automática*, Gramado, RS, Setembro 2004.
- [LTP04b] V. J. S. Leite, S. Tarbouriech, and P. L. Peres. A convex approach for robust state feedback control of discrete-time systems with state delay. In *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, pages 2870–2875, Boston, MS, June 2004.
- [Mah00] M. S. Mahmoud. *Robust Control and Filtering for Time-Dealy Systems*. Control Engineering Series. Marcekl Dekker, Inc., New York, 2000.
- [MK00] T. Mori and H. Kokame. A parameter-dependent Lyapunov function for a polytope of matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(8):1516–1519, August 2000.
- [MLOP04] V. F. Montagner, V. J. S. Leite, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados linear variante com parâmetros: uma abordagem LMI. In *Anais do Congresso Brasileiro de Automática 2004*, Gramado, RS, Setembro 2004.
- [MLP03] V. F. Montagner, V. J. S. Leite, and P. L. D. Peres. Discrete-time switched systems: pole location and structural constrained control. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 6, pages 6242–6247, December 2003.
- [MLP04] V. F. Montagner, V. J. S. Leite, and P. L. D. Peres. Design of a switched control with pole location constraints for a ups system. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics - ISIE 2004*, pages 441–446, Ajaccio, France, May 2004.
- [MLTP05] V. F. Montagner, V. J. S. Leite, S. Tarbouriech, and P. L. D. Peres. Stability and stabilizability of discrete-time switched linear systems with state delay. In *Proceedings of the 2005 American Control Conference*, June 2005. Accepted for publication.
- [MOLP05] V. F. Montagner, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, and P. L. D. Peres. An LMI approach for \mathcal{H}_∞ linear parameter-varying state feedback control. *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*, 152(2), 2005. Accepted for publication.
- [MX00] M. S. Mahmoud and L. Xie. Guaranteed cost control of uncertain discrete systems with delays. *International Journal of Control*, 73(2):105–114, January 2000.

- [MZJ87] M. Malek-Zavarei and M. Jamshidi. *Time-Delay Systems: Analysis, Optimization and Applications*. North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1987.
- [Nic01] S.-I. Niculescu. *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*, volume 269 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, London, 2001.
- [NT73] K. S. Narendra and S. S. Tripathi. Identification and optimization of aircraft dynamics. *Journal of Aircraft*, 10(4):193–199, April 1973.
- [Nyq32] H. Nyquist. Regeneration theory. *Bell Systems Technical Journal*, 11:126–147, January 1932.
- [PABB00] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, and J. Bernussou. A new robust \mathcal{D} -stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, 40(1):21–30, May 2000.
- [Par00] P. A. Parrilo. *Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization*. Ph.D. Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, May 2000.
- [Par01] J.-H. Park. A new delay-dependent criterion for neutral systems with multiple delays. *Applied Mathematics and Computation*, 136(1-2):177–184, November 2001.
- [Par03] J. H. Park. Simple criterion for asymptotic stability of interval neutral delay-differential systems. *Applied Mathematics Letters*, 16(7):1063–1068, October 2003.
- [PKW04] J. H. Park, O. Kwon, and S. Won. LMI approach to robust \mathcal{H}_∞ filtering for neutral delay differential systems. *Applied Mathematics and Computation*, 150(1):235–244, February 2004.
- [PTGL03] P. L. D. Peres, S. Tarbouriech, G. Garcia, and V. J. S. Leite. Robust stability of time-delay continuous-time systems in polytopic domains. In *Proceedings of the 2003 European Control Conference*, University of Cambridge, UK, September 2003.
- [PW00] J. H. Park and S. Won. Stability analysis for neutral delay-differential systems. *Journal of The Franklin Institute*, 337(1):1–9, January 2000.
- [Ric03] J.-P. Richard. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39(10):1667–1694, October 2003.
- [RJ00] A. Rantzer and M. Johansson. Piecewise linear quadratic optimal control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(4):629–637, April 2000.
- [RP01a] D. C. W. Ramos and P. L. D. Peres. A less conservative LMI condition for the robust stability of discrete-time uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 43(5):371–378, August 2001.
- [RP01b] D. C. W. Ramos and P. L. D. Peres. An LMI approach to compute robust stability domains for uncertain linear systems. In *Proceedings of the 2001 American Control Conference*, volume 1, pages 4073–4078, Arlington, VA, June 2001.

- [RP02] D. C. W. Ramos and P. L. D. Peres. An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(4):675–678, April 2002.
- [SBSA03] P. Shi, E.-K. Boukas, Y. Shi, and R. K. Agarwal. Optimal guaranteed cost control of uncertain discrete time-delay systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 157(2):435–451, August 2003.
- [SK98] S. H. Song and J. K. Kim. \mathcal{H}_∞ control of discrete-time linear systems with norm-bounded uncertainties and time delay in state. *Automatica*, 34(1):137–139, January 1998.
- [Sko90] V. I. Skorodinskii. Iterational method of construction of Lyapunov-Krasovskii functionals for linear systems with delay. *Automation and Remote Control*, 51(9):1205–1212, 1990.
- [Stu99] J. F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11–12:625–653, 1999. URL: <http://fewcal.kub.nl/sturm/software/sedumi.html>.
- [Tro99] A. Trofino. Parameter dependent Lyapunov functions for a class of uncertain linear systems: an LMI approach. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 2341–2346, Phoenix, AZ, December 1999.
- [Ver99] E. I. Verriest. Robust stability and adaptive control of time-varying neutral systems. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4690–4695, Phoenix, AZ, December 1999.
- [WH94] J. W. Wu and K. S. Hong. Delay-independent exponential stability-criteria for time-varying discrete delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(4):811–814, 1994.
- [WHU99] Z. D. Wang, B. Huang, and H. Unbehauen. Robust \mathcal{H}_∞ observer design of linear state delayed systems with parametric uncertainty: the discrete-time case. *Automatica*, 35(6):1161–1167, 1999.
- [Wil91] J. C. Willems. Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(3):259–294, March 1991.
- [XC04] S. Xu and T. Chen. Robust \mathcal{H}_∞ control for uncertain discrete-time systems with time-varying delays via exponential output feedback controllers. *Systems & Control Letters*, 51(3-4):171–183, March 2004.
- [XLY01] S. Xu, J. Lam, and C. Yang. Quadratic stability and stabilization of uncertain linear discrete-time systems with state delay. *Systems & Control Letters*, 43(2):77–84, June 2001.
- [XLYV03] S. Xu, J. Lam, C. Yang, and E. I. Verriest. An LMI approach to guaranteed cost control for uncertain linear neutral delay systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13(1):35–53, January 2003.

- [XSF97] L. Xie, S. Shishkin, and M. Fu. Piecewise Lyapunov functions for robust stability of linear time-varying systems. *Systems & Control Letters*, 31(3):165–171, August 1997.
- [Xu02] S. Xu. Robust \mathcal{H}_∞ filtering for a class of discrete-time uncertain nonlinear systems with state delay. *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part I: Fundamental Theory and Applications*, 49(12):1853–1859, December 2002.
- [YH04] D. Yue and Q.-L. Han. A delay-dependent stability criterion of neutral systems and its application to a partial element equivalent circuit model. *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part II: Analog and Digital Signal Processing*, 51(12):685–689, December 2004.
- [ZDG96] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, 1996.
- [ZKT01] J. Zhang, C. R. Knopse, and P. Tsiotras. Stability of time-delay systems: equivalence between Lyapunov and scaled small-gain conditions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(3):482–486, March 2001.
- [ZWH04] Z. Zuo, J. Wang, and L. Huang. Robust stabilization for non-linear discrete-time systems. *International Journal of Control*, 77(4):384–388, 2004.

Thèse

Préparée conjointement au
Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systemes du CNRS et à
l'Université de Campinas (Brésil)

En vue de l'obtention du
Doctorat de l'Institut National des Sciences Appliqués de Toulouse

par
Valter Júnior de Souza LEITE
Mestre em Engenharia Elétrica — Université Fédérale de Minas Gerais (UFMG/Brésil)
Engenheiro Eletricista — Université Fédérale de Minas Gerais (UFMG/Brésil)

SUR LA STABILITÉ ROBUSTE DE SYSTÈMES LINÉAIRES : UNE APPROCHE PAR DES FONCTIONS DÉPENDANTES DE PARAMÈTRES

Soutenue le 23 Août 2005 devant le jury :

Président	W. C. AMARAL
Directeurs de thèse	P. L. D. PERES S. TARBOURIECH
Rapporteur	E. B. CASTELAN
Examineurs	P.-A. BLIMAN I. QUEINNEC
Invité	G. GARCIA

UNIVERSITÉ DE CAMPINAS
COMMISSION DE POST-GRADUATION EN GENIE ELECTRIQUE

SUR LA STABILITÉ ROBUSTE DE SYSTÈMES LINÉAIRES : UNE
APPROCHE PAR DES FONCTIONS DÉPENDANTES DE PARAMÈTRES

Thèse de doctorat de l'Université de Campinas (Brésil)
en co-tutelle avec l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse (France)

Valter Júnior de Souza LEITE

Campinas — SP, Brésil
Le 23 Août 2005

Avant-Propos

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué conjointement au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS) du CNRS, au sein du groupe "Méthodes et Algorithmes en Commande" (MAC), et à l'Université de Campinas (UNICAMP, Brésil). Je remercie Mr. Malik Ghallab, Directeur du LAAS, pour m'avoir accueilli dans ce laboratoire et l'agence brésilienne Fundação Coordenação de Pessoal de Nível Superior (CAPES) qui a financé mon séjour en France. Je remercie également toutes les personnes du LAAS qui m'ont aidé.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude et reconnaissance à Mme. Sophie Tarbouriech, directrice de recherche au CNRS (LAAS-CNRS), et à Mr. Pedro Luis Dias Peres, professeur à l'UNICAMP, pour avoir encadré ce travail de thèse en co-tutelle entre l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Toulouse et l'UNICAMP. J'exprime aussi ma reconnaissance envers Mr. Germain Garcia, professeur à l'INSA de Toulouse et chercheur au LAAS-CNRS.

Je tiens à remercier Mr. Silviu-Iulian Niculescu, directeur de recherche au CNRS (Heudiasyc, Compiègne), et à Mr. Eugênio de Bona Castelan, professeur à l'Université Fédérale de Santa Catarina (UFSC, Brésil), d'avoir accepté d'examiner ce travail en tant que rapporteurs. Je remercie également Mme. Isabelle Queinnec, chargée de recherche au CNRS (LAAS-CNRS), MM. Wagner Caradori do Amaral, professeur à l'UNICAMP et Pierre-Alexandre Bliman, chargé de recherche à l'INRIA (INRIA, Rocquencourt), qui ont accepté de participer au jury de cette thèse.

Je remercie sincèrement toutes les membres du groupe MAC et plus particulièrement MM. Frédéric Gouaisbaut, Dimitri Peaucelle, Didier Henrion et Denis Arzelier. Un grand merci aussi pour l'aide que j'ai reçue en France de la part de Eduardo Loures, Magnos Martinello et Roberta Gomes. Je ne saurais oublier mon collègue Jean Rodrigues Sales et notre effort pour apprendre le français.

Finalement il me faut remercier Claudia qui était à mon côté tout le temps, pour son soutien et sa tendresse.

A CLÁUDIA ET GUSTAVO
AVEC TOUT MA TENDRESSE.

Résumé

LEITE, Valter Júnior de Souza, *Sur la stabilité robuste de systèmes linéaires : une approche par des fonctions dépendantes de paramètres*. Campinas, FEEC, UNICAMP, 2005. Thèse (Doctorat). En Portuguais et en Français.

Ce travail concerne l'application des fonctions de Lyapunov et Lyapunov-Krasovskii dépendantes de paramètres à quelques problèmes sélectionnés dans le contexte de la commande robuste, à savoir : la \mathcal{D} -stabilité robuste de polytopes de matrices, la \mathcal{D} -stabilité robuste de polytopes de polynômes de matrices, la stabilité robuste de systèmes neutres avec des retards variables dans le temps et la commande robuste \mathcal{H}_∞ de systèmes à temps discret et à états retardés. On utilise la représentation polytopique pour les incertitudes des systèmes étudiés. On obtient des formulations convexes, sous la forme d'inégalités matricielles linéaires, suffisantes pour la solution des problèmes sélectionnés. Ces conditions peuvent être résolues numériquement de manière efficace grâce à l'utilisation d'algorithmes spécialisés basés sur la méthode des points intérieurs. Les résultats obtenus sont moins conservatifs que ceux trouvés dans la littérature, basés, en général, sur la stabilité quadratique, c'est-à-dire, considérant des matrices des fonctionnelles fixes et indépendantes de l'incertitude.

Resumo

LEITE, Valter Júnior de Souza, *Estudos sobre estabilidade robusta de sistemas lineares por meio de funções dependentes de parâmetros*. Campinas, FEEC, UNICAMP, 2005. Tese (Doutorado). Em Português e Francês.

Este trabalho trata da aplicação de funcionais de Lyapunov e Lyapunov-Krasovskii dependentes de parâmetro a alguns problemas selecionados da área de controle robusto, a saber : \mathcal{D} -estabilidade robusta de politopo de matrizes, \mathcal{D} -estabilidade robusta de politopos de polinômios matriciais, estabilidade robusta de sistemas neutrais com atrasos variantes no tempo e controle robusto \mathcal{H}_∞ de sistemas discretos no tempo com atraso nos estados. É utilizada a representação politópica para as incertezas dos sistemas estudados. São obtidas formulações convexas, na forma de desigualdades matriciais lineares, suficientes para a solução dos problemas selecionados. Essas condições podem ser resolvidas numericamente de maneira eficiente por meio de algoritmos especializados baseados em pontos interiores. Os resultados obtidos são menos conservadores que os encontrados na literatura, baseados em geral na estabilidade quadrática, isto é, as matrizes dos funcionais são fixas e independentes da incerteza.

Abstract

LEITE, Valter Júnior de Souza, *On the robust stability of linear systems by means of parameter dependent functions*. Campinas, FEEC, UNICAMP, 2005. Thesis (Ph. D.). In Portuguese and French.

This work deals with the application of parameter dependent Lyapunov and Lyapunov-Krasovskii functionals to some selected problems of robust control : robust \mathcal{D} -stability of polytopes of matrices, robust \mathcal{D} -stability of polytopes of polynomial matrices, robust stability of uncertain neutral systems with time-varying delays and robust \mathcal{H}_∞ control of uncertain discrete time delay systems. The polytopic representation is used to describe the uncertainties. Convex formulations are obtained, in terms of linear matrix inequalities, that are sufficient for the solution of the selected problems. Those conditions can be solved in a efficient way through specialized interior point algorithms. The obtained results are less conservative than those from the literature, in general based on quadratic stability, i.e., the matrices in the functionals are fixed and do not depend on the uncertainty.

Table des matières

Avant-Propos	iii
Résumé /Resumo / Abstract	vii
Table des figures	x
Liste des tableaux	xii
Notations	xv
Abréviations	xvii
1 Introduction	1
1.1 Étude de la stabilité robuste de systèmes incertains	2
1.2 Outils mathématiques employés	2
1.2.1 Seconde méthode de Lyapunov	2
1.2.2 Stabilité quadratique (SQ)	3
1.2.3 Fonctionnelles dépendantes de paramètres	3
1.2.4 Approximation de LMIs par des polynômes	4
1.2.5 Lemme de Finsler	4
1.3 Problèmes étudiés et structure de la thèse	5
1.4 Commentaires généraux	7
I \mathcal{D}-stabilité robuste	9
2 \mathcal{D}-Stabilité robuste des systèmes linéaires	13
2.1 Introduction	13
2.2 Préliminaires	15
2.3 Des conditions pour la \mathcal{D} -stabilité du polytope \mathcal{A}	16
2.4 Analyse des conditions LMIs	21
2.4.1 Complexité numérique	21
2.4.2 Le temps de calcul	24
2.5 Conclusion	24
3 \mathcal{D}-stabilité robuste de matrices polynomiales	27
3.1 Introduction	27
3.2 Préliminaires	28
3.3 Conditions pour la \mathcal{D} -stabilité du polytope \mathbb{A}	30
3.3.1 Polynômes matriciels de premier ordre	33
3.3.2 Complexité numérique	33

3.4	Conclusion	35
II	Des systèmes à retard sur les états	37
4	Stabilité robuste de systèmes neutres avec retards variants dans le temps	41
4.1	Introduction	41
4.2	Préliminaires	43
4.3	Stabilité robuste indépendante du retard	44
4.4	Cas particuliers	47
4.4.1	Stabilité robuste du système incertain neutre	48
4.4.2	Stabilité robuste du système incertain à retard dans les états	49
4.4.3	Stabilité robuste du système incertain	49
4.5	Complexité numérique	50
4.6	Conclusion	51
5	La commande robuste \mathcal{H}_∞ de systèmes à temps discret et à retard dans les états	53
5.1	Préliminaires et formulation du problème	55
5.2	Stabilité robuste	57
5.3	Commande robuste	59
5.4	Commande robuste \mathcal{H}_∞	60
5.5	Complexité numérique et extensions	64
5.5.1	Commande décentralisée	64
5.5.2	Des fautes d'actionneurs	65
5.6	Conclusion	65
6	Commentaires finaux	67
6.1	D'Autres travaux réalisés	68
6.2	Perspectives	69
	Bibliographie	71

Table des figures

2.1	Complexité numérique relative (a) SR_1/SE en fonction du nombre d'états n et (b) SR_2/SE par rapport au nombre de sommets N (cas à temps discret).	23
2.2	Complexité numérique relative (a) SR_2/SE en fonction du nombre d'états n et (b) SR_2/SE par rapport au nombre de sommets N (cas à temps continu).	23
3.1	Région du plan complexe décrite par $\tilde{\mathcal{R}}_D$	32

Liste des tableaux

2.1	Nombre de variables scalaires (\mathcal{K}) et nombre de lignes LMI (\mathcal{L}) en fonction du nombre d'états (n), sommets (N) et ordre de la région (d), quand pertinent, pour les conditions proposées dans les Théorèmes 2.1 (SC_1) et 2.2 (SC_2), dans le Corollaire 2.1 <i>i</i>) (SQ_1) et <i>ii</i>) (SQ_2), en [PABB00] (SE), en [RP01a] (SR_1) pour le cas à temps discret et en [RP02] (SR_2) pour le cas à temps continu.	22
3.1	Le nombre de variables scalaires (\mathcal{K}) et le nombre de lignes LMI (\mathcal{L}) en fonction du nombre d'états (n), sommets (N) et degré du polynôme matriciel (g), pour les conditions proposées dans les Théorèmes 3.1 (TE_1) et 3.2 (TE_2), dans le Lemme 3.3 (DQ), dans le Théorème 1 de [HAPŠ01] (T1_{HAPS}) et dans les Théorèmes 1 (T1_{dOOP}) (demi-plan gauche du plan complexe) et 2 (T2_{dOOP}) (disque unitaire centré sur l'origine du plan complexe) proposés dans [dOP02].	34
4.1	Nombre de variables scalaires \mathcal{K} et nombre de lignes \mathcal{L} en fonction du nombre d'état (n) et de sommets (N) pour les conditions d'analyse de stabilité étudiées.	51
5.1	Nombre de variables scalaires, \mathcal{K} , et nombre de lignes LMI, \mathcal{L}	65

Notations

\otimes	Produit de Kronecker
\mathbb{N}	Corps des nombres naturels
\mathbb{R}	Corps des nombres réels
\mathbb{R}_+	Corps des nombres réels qui ne sont pas négatifs
\mathbb{R}^n	Espace des vecteurs à n entrées réelles
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Espace des matrices réelles de dimension $m \times n$
\mathbb{C}	Corps des nombres complexes
A'	Transposée de A
A^*	Transposée conjuguée de A
\mathbf{I}_d	Matrice identité de dimension $d \times d$
$\mathbf{0}$	Matrice nulle
$M > P$ ($M < P$)	La matrice $M - P$ est définie positive (négative)
$M \geq P$ ($M \leq P$)	La matrice $M - P$ est semi-définie positive (négative)
\star	Les éléments ou blocs symétriques par rapport à la diagonale principale d'une matrice symétrique
ℓ_2	L'espace de toutes les séquences de vecteurs d'entrées réelles sur le corps des nombres entiers avec énergie finie
$\ x(k)\ _2$	l'énergie de $x(k)$
$\mathcal{C}_\tau = \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$	L'espace de Banach des fonctions vectorielle qui définies sur $[-\tau, 0]$ à valeurs dans \mathbb{R}^n , muni de la topologie de la convergence uniforme
\mathcal{C}_τ^v	Corps défini par $\mathcal{C}_\tau^v = \{\phi \in \mathcal{C}_\tau ; \ \phi\ _c < v, v > 0\}$
$\ \phi\ _c$	Représente $\sup_{-\tau \leq t \leq 0} \ \phi\ $, où $\ \phi\ $ est la norme 2 de ϕ
$\rho(A)$	Rayon spectral de A

Abréviations

LMI	Inégalité matricielle linéaire (en anglais, <i>Linear Matrix Inequality</i>)
LMIs	Inégalités matricielles linéaires
EQ	Stabilité quadratique

Chapitre 1

Introduction

La stabilité est la propriété qui permet à un système perturbé le retour à son état d'équilibre en temps fini lorsque l'effet de la perturbation a cessé. Cette propriété est essentielle pour garantir le fonctionnement sûr d'un système, représentant par exemple un système industriel. L'étude de la stabilité dans les systèmes réels trouve dans les études sur les retours de signaux faites par H.W. Bode une marque fondamentale : dans [Bod45] sont recherchées les propriétés de retour de signaux dans les circuits amplificateurs, à travers des modèles mathématiques, en analysant les effets du retour dans la stabilité de la boucle fermée et en proposant des méthodes pour la synthèse de compensateurs. Bode utilise l'analyse dans le domaine fréquentiel et des résultats de Nyquist [Nyq32] pour étudier le comportement des circuits électriques, en prenant en compte le fait que les paramètres de ces circuits peuvent souffrir de variations avec le temps, la température, etc. La prise en compte des incertitudes inhérentes aux modèles mathématiques, en général obtenus par des équations différentielles ou par des techniques d'identification et utilisés pour représenter les procédés réels, reste primordiale. En général, on peut considérer une représentation mathématique des systèmes dynamiques sous la forme

$$\dot{x} = f(x(t), \alpha(t), u(t)) \quad (1.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\alpha(t)$ représente les incertitudes associées au modèle ou système, $u(t)$ est le vecteur de commande et $f(\cdot)$ est la fonction — équation différentielle — qui détermine les trajectoires du système au cours du temps, t . En général, $f(x(t), \alpha(t), u(t))$ est une fonction non-linéaire. Néanmoins, les boucles de commande, surtout en milieu industriel, sont établies à partir d'un modèle linéaire du système, en général du premier ou du second ordre, qui peut inclure, ou non, un retard, et qui fournit, la plupart du temps, une bonne représentation du comportement du système réel autour d'un point d'opération. Ces modèles, bien que simples, sont capables de capturer la dynamique principale de la variable qui doit être contrôlée, et servent de point de départ pour l'ajustement des contrôleurs. Cependant, en général, les paramètres du modèle ne sont pas précisément connus on encore des dynamiques d'ordres plus élevés sont négligées. Une façon de contourner cette simplification peut être de prendre en compte des incertitudes de modélisation. Dans ce contexte, le fonctionnement sûr d'un système réel passe par la garantie de la stabilité de ce système incertain.

Ainsi, assurer la stabilité d'un système en boucle fermée, même en présence d'incertitudes, est devenu un important champ d'étude de la théorie de la commande. D'ailleurs, garantir certaines caractéristiques de performance pour le système bouclé affecté par des incertitudes a des implications immédiates dans les aspects de sécurité, qualité du produit et économie du procédé. Dans ce sens, une spécification commune

consiste en la localisation des pôles de la boucle fermée du système incertain dans certaines régions du plan complexe. Ainsi, des méthodes d'analyse et de synthèse assurant une localisation régionale pour les pôles du système incertain bouclé occupent une place importante dans la théorie de la commande. Ce type d'étude, appelé \mathcal{D} -stabilité, a connu un grand développement ces dernières années (voir, par exemple, [Bac98], [CG96] et [PABB00]).

1.1 Étude de la stabilité robuste de systèmes incertains

Dans le contexte de l'étude de la stabilité de systèmes avec incertitudes, c'est-à-dire dans le contexte de l'analyse de stabilité robuste, plusieurs approches peuvent être trouvées dans la littérature. Parmi celles-ci, cela vaut la peine de mettre en évidence la μ -analyse [ZDG96], des méthodologies basées sur des polynômes de Kharitonov [BCK95], des méthodes dans le domaine fréquentiel [NT73] et les méthodes basées sur des fonctions de Lyapunov. Ces dernières constituent une des approches les plus utilisées ces dernières années pour l'analyse de stabilité robuste et pour la synthèse de contrôleurs robustes. La représentation de systèmes incertains, dans l'espace des états, est donnée par

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) \quad (1.2)$$

où $A(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice incertaine appartenant à un polytope convexe avec des sommets connus. L'étude de la stabilité de tels systèmes a été amplement abordée par des méthodes basées sur des fonctions de Lyapunov. Dans ce cas, la stabilité du système est toujours étudiée par rapport à l'origine de l'espace des états.

1.2 Outils mathématiques employés

1.2.1 Seconde méthode de Lyapunov

Le large usage de la “seconde méthode” ou “méthode directe” de Lyapunov pour traiter la stabilité du système décrit par (1.2) est dû à la généralité des conditions établies par Lyapunov pour vérifier la stabilité asymptotique globale d'un système sujet à des incertitudes décrites par un paramètre $\alpha(t)$. Ce résultat est présenté dans le théorème suivant.

Théorème 1.1 (Lyapunov, [BS70]) *Le système incertain sujet à des incertitudes (1.2) est globalement asymptotiquement stable autour de l'origine (point d'équilibre du système) s'il existe une fonction à valeurs réelles $V(x(t), \alpha(t))$ telle que :*

1. $V(\mathbf{0}, \alpha(t)) = 0, \quad \forall t \geq 0;$
2. $V(x(t), \alpha(t)) \rightarrow \infty$ quand $\|x(t)\| \rightarrow \infty;$
3. $V(x(t), \alpha(t)) > 0, \quad \forall x(t) \neq \mathbf{0}, \quad \forall t \geq 0;$
4. $\dot{V}(x(t), \alpha(t)) < 0, \quad \forall x(t) \neq \mathbf{0}, \quad \forall t \geq 0;$

où $\dot{V}(\cdot)$ est la dérivée temporelle de $V(\cdot)$ le long des trajectoires du système (1.2).

Une fonction $V(x(t), \alpha(t))$ qui satisfait toutes les conditions du Théorème 1.1 est appelée “fonction de Lyapunov”. Une observation importante est que, dans le cas des systèmes linéaires invariants dans le temps, l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique en x et dépendante du paramètre incertain α est une condition nécessaire et suffisante pour assurer la stabilité robuste asymptotique.

1.2.2 Stabilité quadratique (SQ)

Le problème de l'analyse de stabilité en utilisant la seconde méthode de Lyapunov vient de la détermination d'une fonction de Lyapunov. Ainsi, une grande part des recherches réalisées dans les dix dernières années a consisté à vérifier l'existence d'une fonction de Lyapunov du type

$$V(x(t), \alpha(t)) = x(t)'P(\alpha(t))x(t) \quad (1.3)$$

où $P(\alpha(t))$ est une matrice définie positive pour toutes les valeurs possibles de $\alpha(t)$. Un choix possible, et assez commun, pour $P(\alpha(t))$ est

$$P(\alpha(t)) = P(\alpha(t))' \in \mathbb{R}^{n \times n} : P(\alpha(t)) = P > \mathbf{0} \quad (1.4)$$

où P est fixe (indépendamment des valeurs prises par $\alpha(t)$). Quand un système admet une fonction de Lyapunov donnée par (1.3)-(1.4), alors on dit que ce système est quadratiquement stable. Ce concept de stabilité quadratique (SQ) [Bar85], implique l'existence d'une même fonction de Lyapunov, indépendante des paramètres incertains, assurant la stabilité du système pour tout le domaine d'incertitudes. Cela constitue probablement le résultat le plus important des années 80 dans le contexte de la commande.

À partir de la stabilité quadratique, plusieurs résultats pour l'analyse, contrôle et filtrage robuste, avec des critères de performance tels que les normes \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ , ont été développés (voir, par exemple, [BEFB94] et des références internes). Ces conditions, presque toujours formulées en termes d'inégalités matricielles linéaires (en Anglais, LMIs — *Linear Matrix Inequalities*), sont devenues facilement traitables numériquement avec l'apparition d'algorithmes de calcul spécialisés [GNLC95], [Stu99]. Quelques travaux ont abordé le problème avec des fonctions de Lyapunov quadratiques par parties (par exemple [XSF97], [RJ00], [LP04]), mais la solution numérique, en général, requiert un effort de calcul élevé.

1.2.3 Fonctionnelles dépendantes de paramètres

Quoique l'approche basée sur la stabilité quadratique soit spécialement adéquate à l'analyse de systèmes incertains avec des paramètres variables dans le temps, sans restriction de la valeur du taux de variation, les résultats obtenus par ce moyen peuvent être très conservatifs, spécialement quand on sait qu'il s'agit d'un système invariant dans le temps. Récemment, plusieurs extensions sont apparues dans la littérature pour l'analyse et la synthèse de contrôleurs pour des systèmes linéaires incertains. Avec l'intention d'obtenir des conditions d'analyse chaque fois moins conservatives, des fonctions de Lyapunov dépendantes de paramètres ont été fréquemment utilisées [FAG96], [GAC96], [MK00], [Tro99]. Cependant, dans la plupart des conditions proposées, quelques restrictions structurelles ont besoin d'être vérifiées. Il y a encore des cas dans lesquels la procédure numérique pour le test de stabilité dépend de paramètres d'échelonnement ou de discrétisation de l'espace paramétrique dans une boucle suffisamment mince.

Ainsi, l'objectif de ce travail est de rechercher des conditions convexes et de dimensions finies capables de fournir des fonctions de Lyapunov dépendantes de paramètres pour des systèmes linéaires incertains et invariants dans le temps. Pour cela, les incertitudes qui affectent le système sont supposées être sous la forme polytopique, avec N sommets connus, mais avec un vecteur paramétrique incertain invariant dans le temps : $\alpha(t) = \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1, \alpha_j \geq \mathbf{0}, j = 1, \dots, N$.

Les conditions obtenues, pour les différents problèmes étudiés, fournissent des résultats a priori moins conservatifs que ceux où on utilise la SQ comme base.

1.2.4 Approximation de LMIs par des polynômes

Pour le développement de ce travail, deux techniques sont plus particulièrement employées. La première, utilisée principalement dans les chapitres 2 et 3, est basée sur les résultats présentés en [RP01a] et [RP02], dont l'idée principale est dans la solution d'une LMI paramétrisée en α

$$M(r, \alpha) < \mathbf{0}, \quad (1.5)$$

avec r dans le rôle de variable d'optimisation, à travers un second problème d'optimisation, suffisant pour la solution du problème original, donné par

$$M(r, \alpha) < \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 M(r)_j - \frac{2}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \alpha_j \alpha_k M(r)_{jk} \leq \mathbf{0} \quad (1.6)$$

ou

$$M(r, \alpha) < \sum_{j=1}^N \alpha_j^3 M(r)_j + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1; k \neq j}^N \alpha_j^2 \alpha_k M(r)_{jk} + \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=j+1}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \alpha_j \alpha_k \alpha_\ell M(r)_{jkl} \leq \mathbf{0} \quad (1.7)$$

La matrice $M(r)$ est une fonction indépendante du vecteur d'incertitudes α . Dans le cas général, $M(r, \alpha)$ peut être exprimée comme une fonction matricielle polynomiale en α de degré quelconque. Toutefois, la recherche réalisée dans ce travail ne touche qu'au cas où $M(r, \alpha)$ peut être écrite comme un polynôme en α de degré deux ou trois. De cette façon, en utilisant des relaxations LMI sur la restriction $M(r, \alpha) < \mathbf{0}$, des conditions convexes et de dimensions finies suffisantes pour garantir (1.5) sont obtenues. Parmi les travaux en rapport avec cette approche, méritent d'être mis en relief ceux qui utilisent la somme de carrés (en Anglais, SOS — *Sum of Squares*) et ceux qui abordent le problème à travers l'étude de la positivité de polynômes. Pour les détails, voir [Par00], [Las01] et [HL03].

1.2.5 Lemme de Finsler

L'autre technique utilisée dans ce travail est l'employé le Lemme de Finsler pour séparer des produits entre les matrices du système et celles de la fonctionnelle de Lyapunov. D'autre part, l'usage de ce lemme permet l'introduction de nouvelles variables matricielles d'optimisation qui sont exploitées pour la réduction du conservatisme des conditions étudiées. Ce lemme est présenté ici pour le cas dépendant de paramètres.

Lemme 1.1 Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Q}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, symétrique, et $\mathcal{B}(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\alpha : \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, N$, telles que $\text{rang}(\mathcal{B}(\alpha)) < n$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $x' \mathcal{Q}(\alpha) x < \mathbf{0}, \quad \forall x : \mathcal{B}(\alpha) x = \mathbf{0}, \quad x \neq \mathbf{0}$
- ii) $\mathcal{B}^\perp(\alpha)' \mathcal{Q}(\alpha) \mathcal{B}^\perp(\alpha) < \mathbf{0}$, où $\mathcal{B}^\perp(\alpha)$ dénote une base pour l'espace nul de $\mathcal{B}(\alpha)$
- iii) $\exists \mu(\alpha) \in \mathbb{R}_+ : \mathcal{Q}(\alpha) - \mu(\alpha) \mathcal{B}(\alpha)' \mathcal{B}(\alpha) < \mathbf{0}$
- iv) $\exists \mathcal{X}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{Q}(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha) \mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)' \mathcal{X}(\alpha)' < \mathbf{0}$

Ainsi, ces deux techniques (approximation par des polynômes et Lemme de Finsler) sont utilisées pour rechercher l'usage de fonctionnelles de Lyapunov dépendantes de paramètres dans les systèmes linéaires. L'application de ces idées est présentée en deux parties. Dans la première, est recherchée la \mathcal{D} -stabilité

robuste de systèmes linéaires. On étudie, donc, la \mathcal{D} -stabilité robuste de matrices incertaines (vérification de l'appartenance des valeurs propres d'un polytope de matrices à une région \mathcal{D} du plan complexe) autant que de polynômes matriciels incertains (vérification de l'appartenance des zéros d'un polytope de polynômes matriciels à une région \mathcal{D} du plan complexe). Dans la seconde partie de ce travail on recherche l'application de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii dépendantes de paramètres à des systèmes linéaires incertains avec des retards dans les états. Bien qu'ils ne soient pas présentés dans ce travail, les résultats obtenus dans cette partie peuvent être développés en suivant les idées de [LP03a], [RP01a], [RP02] pour l'analyse robuste, idées qui sont exploitées dans la Partie I. En particulier pour les systèmes discrets dans le temps, des conditions pour l'estimation du coût garanti \mathcal{H}_∞ , ainsi que pour la synthèse de gains robustes de retour des états qui assurent un coût garanti \mathcal{H}_∞ pour le système en boucle fermée, sont présentées dans la Partie II.

De cette façon, quatre problèmes importants du point de vue de la théorie du contrôle ont été étudiés, en envisageant l'application de fonctions de Lyapunov (ou Lyapunov-Krasovskii) dépendantes de paramètres pour la réduction du conservatisme de conditions LMI basées sur la stabilité quadratique. Ces problèmes sont rapidement présentés dans la suite.

1.3 Problèmes étudiés et structure de la thèse

Dans la première partie de ce travail sont présentées des conditions convexes de dimension finie pour l'analyse de \mathcal{D} -stabilité de deux problèmes fondamentaux de la théorie du contrôle. Dans le Chapitre 2 des fonctions de Lyapunov dépendantes de paramètres sont utilisées pour analyser la \mathcal{D} -stabilité de systèmes linéaires incertains décrits par

$$\delta[x(t)] = A(\alpha)x(t)$$

où $\delta[\cdot]$ dénote la dérivée par rapport au temps pour les systèmes continus dans le temps et l'opérateur d'avancement pour les systèmes discrets dans le temps et $A(\alpha)$ est une matrice incertaine invariante dans le temps avec $\alpha \in \mathbb{R}^N$, $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \dots, N$, $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$. Ce problème a été amplement étudié dans les dernières années, surtout avec des outils basés sur les LMIs comme peuvent en attester les travaux [GAC96], [PABB00], [dOBG99], [RP01a], [RP02], [LP03a]. Dans ce contexte, une discussion à propos de l'existence de solutions du type polynomiale pour les LMIs dépendantes de paramètres peut être trouvée dans [Bli04b]. Dans [CGTV03], des conditions LMIs pour l'existence des fonctions de Lyapunov quadratique dans les états, polynomiales, homogènes dans les paramètres incertains et basées en représentations matriciel de carrés sont présentées. Une famille de conditions LMI chaque fois plus précises pour la stabilité de systèmes incertains décrits sous la forme affine est donnée dans [Bli04a]. De telles conditions deviennent nécessaires si le nombre de LMIs est suffisamment grand et elles sont associées à l'existence d'une fonction de Lyapunov polynomiale dans les paramètres. Cette méthode peut être utilisée de façon récursive pour traiter des systèmes polytopique.

L'autre problème étudié dans cette première partie du travail concerne la \mathcal{D} -stabilité de matrices polynomiales, c'est-à-dire le cas où $A(\alpha)$ est une matrice dont les entrées sont des polynômes (incertains). Les matrices polynomiales constituent un outil important pour l'étude de systèmes de contrôle, car la dynamique de beaucoup de systèmes peut être décrite d'une manière plus naturelle à travers des représentations linéaires fractionnelles ou par des matrices dont les coefficients sont des polynômes [KV93]. Dans ce contexte, plusieurs approches pour l'analyse de stabilité robuste et pour le contrôle de systèmes sont

basées sur l'utilisation de matrices polynomiales, comme par exemple, l'approche polynomiale [Kuč79] et l'approche comportementale [Wil91]. Dans le cas de la description d'un système par des matrices fractionnelles, la matrice polynomiale correspondant au dénominateur fournit des informations sur la dynamique et la stabilité du système [Kai80], et le positionnement des zéros de la matrice polynomiale correspondant au numérateur est associé aux spécifications de performance du système [Ack93]. Une bonne discussion sur l'importance de matrices polynomiales, l'analyse de la stabilité robuste de polynômes et l'évolution des méthodes numériques pour la vérification des conditions de stabilité peut être trouvée dans [HAPŠ01] et [HBŠ01]. Pour une étude plus approfondie sur la nature et les propriétés générales des matrices polynomiales on recommande [GLR82]. Notons que, due à la présence de paramètres incertains, l'analyse de la stabilité robuste de systèmes dynamiques passe par la vérification de la stabilité de matrices polynomiales incertaines, et une des formes plus générales de représentation des incertitudes paramétriques est la représentation polytopique [Bar94]. Ainsi, dans le Chapitre 3, sont présentées des conditions convexes de dimension finie suffisantes pour l'analyse de \mathcal{D} -stabilité de polytopes de matrices polynomiales. Les résultats présentés contiennent et étendent ceux de [dOP02], [HBŠ01] et [HAPŠ01].

Dans la Partie II sont étudiés des systèmes linéaires incertains avec retard dans les états, qui représentent beaucoup de systèmes dynamiques (voir [DV97], [Mah00], [Hal77], [KR99], [MZJ87], [Nic01] et des références internes). L'usage de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii est, sans doute, une des principales approches utilisées pour l'analyse de stabilité de ce type de système [KNR99], [Sko90] et on voit un effort significatif pour la caractérisation de la stabilité robuste à travers des LMIs. Dans [ZKT01], il est montré comment quelques conditions obtenues à travers des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii peuvent être vérifiées comme des cas particuliers d'une approche fréquentielle basée sur des techniques de μ -analyse. Les résultats présentés dans ce cas sont restreints au cas précisément connu.

Pour la classe de systèmes linéaires avec retard dans les états il existe deux types de conditions pour l'analyse de stabilité : celles qui sont dépendantes du retard et celles qui sont indépendantes du retard. Dans le premier cas les conditions permettent de garantir la stabilité d'un système avec retard dans les états pour toutes les valeurs du retard $\tau \in [0, \bar{\tau}]$, où $\bar{\tau}$ dénote la valeur maximale que peut prendre τ . Les conditions indépendantes du retard sont capables de garantir (quand elles sont satisfaites) la stabilité de systèmes avec retard pour toute valeur (positive) de τ . Comme, en général, les conditions dépendantes du retard sont suffisantes, il n'est pas toujours possible de caractériser de manière adéquate la stabilité d'un système avec des retards dans les états. Dans ce travail sont développées des conditions du type indépendante du retard pour des systèmes incertains.

Dans le Chapitre 4, une autre classe de systèmes linéaires avec retard est étudiée : les systèmes neutres. Ce type de système possède une équation dynamique qui dépend de l'état actuel, de l'état retardé et de la dérivée de l'état retardé, et est modélisé par des équations différentielles [Hal77] du type

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta(x_\tau) = A(\alpha)x(t) + A_h(\alpha)x(t - h(t)) \quad (1.8)$$

$$\Delta(x_\tau) \triangleq x(t) - E(\alpha)x(t - \tau(t)) \quad (1.9)$$

Notons que ce type de système contient la classe (plus connue) des systèmes continus dans le temps avec retard dans les états dont la dynamique ne dépend que de l'état actuel et de l'état retardé ($E(\alpha) = \mathbf{0} \forall \alpha$ en (1.8)). Dans ce chapitre des conditions suffisantes sont présentées, basées sur des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii dépendantes de paramètre, qui sont moins conservatives que celles disponibles

dans la littérature, en considérant ici la situation plus générale de retards variables dans le temps. Des conditions plus simples pour l'analyse de stabilité robuste peuvent aussi être obtenues par l'utilisation de transformations de congruence appliquées aux conditions plus générales, quand une ou plus des matrices de l'équation dynamique (1.8) sont nulles.

Finalement, dans le Chapitre 5, des systèmes discrets dans le temps avec retard dans les états sont étudiés, encore ici à travers de conditions indépendantes du retard. Notons que, s'il existe une vaste littérature en ce qui concerne les systèmes continus dans le temps avec retard dans les états, ceci n'est pas le cas pour les systèmes discrets dans le temps. En effet, pour des retards connus et fixes dans le temps, il est toujours possible d'inclure des états en retard dans un vecteur d'état et d'appliquer des techniques standard (d'analyse) au système augmenté [ÅW84]. Néanmoins, parmi d'autres difficultés telles que l'augmentation de la complexité et la nécessité d'imposer des restrictions structurelles au gain de retour d'état pour obtenir un gain de retour d'état pour l'état original, cette stratégie n'est pas applicable pour le cas de retards inconnus ou non-limités, car, dans ce cas, il faudrait le test d'un nombre infini de systèmes augmentés. D'ailleurs, la représentation par des états augmentés peut être assez complexe pour la synthèse d'une loi de contrôle pour le système original, qui considère un retour des états retardés. Observons encore que les conditions pour la stabilisation de systèmes discrets dans le temps avec des conditions du type dépendant du retard peuvent être, en général, assez conservatives, spécialement quand le système peut être stabiliser pour toute valeur du retard. Dans ce sens, les résultats du Chapitre 5 proposent des conditions indépendantes du retard plus précises (alors moins conservatives) pour rechercher la stabilité robuste de cette classe de systèmes, et pour traiter les problèmes d'estimation du coût garanti \mathcal{H}_∞ et de stabilisation robuste \mathcal{H}_∞ .

Dans le Chapitre 6 sont présentés les commentaires finaux à propos de l'usage de fonctions de Lyapunov-Krasovskii dépendantes de paramètres dans les problèmes étudiés et quelques thèmes sélectionnés comme des perspectives pour la continuation des travaux. On présente encore une liste d'autres travaux développés, qui ont un rapport indirect avec les sujets traités ici.

1.4 Commentaires généraux

Dans ce travail la stabilité asymptotique est traitée, toujours en considérant l'origine comme point d'équilibre. Fréquemment ce concept de stabilité est référencé de façon simplifiée comme "stabilité". Ainsi, quand il est indiqué qu'un système est stable, on doit comprendre que, son vecteur d'état converge asymptotiquement vers l'origine de l'espace d'état, pour toute condition initiale différente de zéro, quand le temps tend vers infini.

On suppose que tous les systèmes incertains recherchés dans ce travail possèdent des matrices incertaines qui appartiennent à des polytopes convexes avec un nombre de sommets finis et connus.

Les résultats des exemples numériques présentés dans ce travail ont été obtenus à partir de la programmation des conditions LMI étudiées avec Matlab et la *LMI Control Toolbox* [GNLC95]. Dans ce cas, pour utiliser un algorithme de points intérieurs pour la solution des LMIs, la complexité des problèmes d'optimisation proposés est de l'ordre de $\mathcal{O}(\mathcal{K}^3\mathcal{L})$, où \mathcal{K} est le nombre de variables scalaires d'optimisation et \mathcal{L} est le nombre de lignes dans les LMIs. D'autres algorithmes d'optimisation peuvent présenter une complexité différente. Par exemple, en utilisant le programme SeDuMi pour résoudre un problème de programmation semi-définie, la complexité est de l'ordre de $\mathcal{O}(\mathcal{K}^2\mathcal{L}^{5/2} + \mathcal{L}^{7/2})$. Pour des détails, voir [Stu99].

Première partie

\mathcal{D} -stabilité robuste

Dans cette première partie du travail sont présentés des résultats moins conservatifs que ceux trouvés dans la littérature pour l'analyse de \mathcal{D} -stabilité robuste de systèmes linéaires incertains et de polynômes matriciels incertains, par rapport à une région (convexe) du plan complexe. Il s'agit d'étudier l'appartenance de toutes les valeurs propres du système linéaire incertain ou de tous les zéros du polynôme matriciel incertain à une région prédéterminée — et supposée convexe — du plan complexe. Quoique ce problème soit reconnu difficile, les résultats obtenus sont présentés via des conditions convexes (LMIs), dont les solutions sont basées sur des tests simples de faisabilité. Ces tests peuvent être résolus numériquement de manière efficace par des algorithmes spécialisés de points intérieurs. Premièrement on propose des conditions convexes pour la solution du problème d'analyse de \mathcal{D} -stabilité robuste, néanmoins de dimension infinie dans le paramètre d'incertitude. Deuxièmement, on propose des conditions convexes suffisantes pour assurer la vérification des conditions de dimension infinie au paramètre de l'incertitude. Ces nouvelles conditions, formulées dans un nombre fini de LMIs, sont numériquement possibles et d'application facile.

Chapitre 2

\mathcal{D} -Stabilité robuste des systèmes linéaires

Dans ce chapitre, le problème de l'analyse de \mathcal{D} -stabilité robuste pour la classe des systèmes linéaires incertains et invariants dans le temps est étudié. Par \mathcal{D} -stabilité on comprend l'appartenance de toutes les valeurs propres du système incertain dans une région \mathcal{D} du plan complexe. Les incertitudes sont du type polytopique, avec des sommets connus. On présente des conditions convexes (LMIs) suffisantes pour la vérification de la \mathcal{D} -stabilité robuste de cette classe de systèmes incertains. Les conditions présentées, basées sur des fonctions de Lyapunov dépendantes de paramètres, possèdent une formulation convexe en les variables d'optimisation, cependant, de dimension infinie par rapport au paramètre d'incertitude. À partir de ces conditions, sont obtenues d'autres conditions, de dimension finie par rapport au paramètre de l'incertitude, et convexes par rapport aux variables d'optimisation. Dans ce cas là, le nombre de LMIs est plus grand que le nombre de sommets qui définissent le polytope, mais les conditions peuvent être résolues en temps polynomial avec des algorithmes spécialisés de points intérieurs. On démontre que ces conditions mènent à des résultats bien moins conservatifs que ceux obtenus, par exemple, avec la stabilité quadratique, c'est-à-dire, en utilisant une fonction de Lyapunov fixe et indépendante de l'incertitude associée au système. Les résultats présentés dans ce chapitre peuvent être partiellement trouvés dans [LP03a], [LP03b], [LMd⁺04], [LMRP02], [dOOL⁺02a] et [dOOL⁺02b].

2.1 Introduction

Parmi les approches pour l'étude de stabilité des systèmes incertains disponibles dans la littérature, dans ce chapitre sont considérés les méthodes basées sur des formulations LMI et des incertitudes appartenant à des domaines polytopiques, dans le cadre des systèmes linéaires invariants dans le temps, à temps continu et à temps discret.

Dans ce contexte, plusieurs conditions basées sur des fonctions de Lyapunov dépendantes de paramètres méritent de se détacher. Parmi elles, considérons celles proposées dans [GdOH98] où il s'agit de la stabilité robuste de systèmes linéaires à temps continu et invariants dans le temps. Dans ce travail, des conditions suffisantes pour la stabilité structurelle d'une classe de systèmes à temps continu ont été proposées en termes de LMIs, en établissant les rapports de ce résultat avec la positivité réelle et la passivité dans les systèmes linéaires. L'idée principale contenue dans cette approche est dans l'augmentation de l'ordre

des LMIs et dans l'inclusion de nouvelles variables matricielles, de façon à obtenir, avec ces degrés de liberté additionnels, des résultats moins conservatifs que ceux obtenus avec la stabilité quadratique. Une propriété fondamentale de ces conditions est la séparation du produit de la matrice dynamique du système et de la matrice de Lyapunov. Dans ce cas, la stabilité robuste est garantie par une fonction de Lyapunov dépendante de paramètres, construite à partir des matrices de Lyapunov qui sont des solutions faisables pour un ensemble de LMIs décrites aux sommets du domaine des incertitudes (formulation des incertitudes dans un domaine polytopique). En dépit du fait qu'elles donnent des résultats meilleurs que ceux obtenus avec la stabilité quadratique, ces conditions (appelées ici de stabilité robuste étendue — SE) sont encore conservatives quand elles sont comparées avec le réel domaine de stabilité, probablement parce qu'elles exigent qu'une ou plusieurs variables satisfassent conjointement toutes les LMIs. Des conditions moins rigides (notamment pour les cas de plus grandes dimensions) ont été présentées dans [RP02], basées sur la construction appropriée d'un nombre plus grand de LMIs décrites en fonction des sommets du polytope des incertitudes, dénommées dans ce travail de stabilité robuste (SR_1 pour le cas à temps discret et SR_2 pour le cas à temps continu). Pour les systèmes à temps discret, les tests de stabilité ont évolué d'une manière similaire. Parmi les tests basés sur des fonctions de Lyapunov dépendantes de paramètres on met en relief les approches LMI présentées dans [dOBG99], [dOGH99] (augmentation de l'ordre des LMIs et inclusion de nouvelles variables) et, plus récemment, dans [RP01a] (augmentation du nombre de LMIs).

Une ligne plus ample d'investigation de stabilité passe par l'étude de régions plus générales de stabilité. Dans ce contexte, les régions de stabilité pour les systèmes à temps continu (demi-plan complexe gauche ouvert) aussi bien que pour les systèmes à temps discret (disque unitaire ouvert centré à l'origine du plan complexe) peuvent être vues comme des cas particuliers de la \mathcal{D} -stabilité (robuste), c'est-à-dire l'appartenance de toutes les valeurs propres du système incertain à une région \mathcal{D} du plan complexe. Un avantage immédiat est que le test de stabilité robuste reste, d'une certaine manière, étendu à une région de “performance garantie” en termes du placement régional de pôles. Il est important de mentionner le travail de [GJ81] dans le contexte de l'analyse de \mathcal{D} -stabilité. Plus tard [CG96] propose la synthèse de contrôleurs qui minimisent la norme \mathcal{H}_∞ avec le placement régional de pôles pour lequel sont considérées les régions de premier ordre (voir [Bac98] pour les détails). Mais, dans ce travail, la stabilité quadratique est encore utilisée et, donc, un certain degré de conservatisme est inhérent aux résultats. Une extension des résultats de [GdOH98] est présentée en [PABB00], où, à travers une généralisation des régions traitées par [CG96], différentes régions convexes de premier ordre du plan complexe sont considérées. Dans [PABB00] des conditions convexes décrites par LMIs sont proposées en faisant l'usage de variables matricielles supplémentaires indépendantes du paramètre d'incertitude du système pour l'analyse de \mathcal{D} -stabilité robuste. Les résultats d'analyse présentés dans [PABB00] contiennent ceux de [dOBG99] dans le cas d'analyse de stabilité robuste de systèmes à temps discret. Pour la synthèse, les propositions sont identiques pour le cas des systèmes à temps discret. Notez aussi que les résultats d'analyse de stabilité présentés en [PABB00] peuvent être facilement adaptés pour le cas de synthèse de gain robuste pourvu que la région du plan complexe soit décrite avec $R_{22} > \mathbf{0}$ (voir les équations (2.3)-(2.4)). Il est intéressant de commenter que [PABB00] autant que [RP01a] et [RP02] contiennent la stabilité quadratique comme un cas particulier, dans le sens qu'ils donnent toujours une solution faisable quand le polytope d'incertitude est quadratiquement stable, mais qu'ils sont, cependant, indépendants : une condition peut trouver une solution faisable pour un cas dans lequel l'autre échoue et vice versa.

Dans ce chapitre, une extension des résultats de [PABB00] de façon à obtenir un ensemble fini de

conditions convexes qui assurent la \mathcal{D} -stabilité robuste de systèmes incertains, en considérant encore des régions de premier ordre, est présentée. La principale différence est que, ici, les variables de matrices additionnelles sont aussi considérées dépendantes du paramètre incertain. Les principales idées d'augmentation du nombre de LMIs pour la réduction du conservatisme des conditions d'analyse présentes dans [RP01a] et [RP02] sont utilisées pour obtenir des conditions convexes de dimension finie. Comme toutes les autres conditions, les LMIs proposées ici peuvent être testées par des méthodes numériques éprouvées et de complexité polynomiale [GNLC95]. Les cas des systèmes à temps continu et à temps discret sont abordés comme des cas particuliers de \mathcal{D} -stabilité. Une analyse de la complexité numérique des LMIs utilisées dans chaque type de test est aussi présentée.

2.2 Préliminaires

Considérons le système linéaire

$$\delta[x(t)] = A(\alpha)x(t) \quad (2.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\delta[\cdot]$ représente la dérivée par rapport au temps pour les systèmes à temps continu et l'opérateur d'avance pour les systèmes à temps discret et la matrice $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est inconnue mais appartient à l'ensemble convexe \mathcal{A}

$$\mathcal{A} = \left\{ A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n} : A(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j; \alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, N; \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 \right\} \quad (2.2)$$

où les sommets $A_j, j = 1, \dots, N$ sont connus. Considérons aussi la région du plan complexe définie par

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} \mathbf{I}_d & z\mathbf{I}_d \end{bmatrix} \mathcal{R} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_d & z\mathbf{I}_d \end{bmatrix}^* < \mathbf{0} \right\} \quad (2.3)$$

avec $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{2d \times 2d}$, symétrique, donnée par

$$\mathcal{R} = \left[\begin{array}{c|c} R_{11} & R_{12} \\ \hline R_{12}' & R_{22} \end{array} \right] \quad (2.4)$$

où d est l'ordre de la région. On suppose que $R_{22} \geq \mathbf{0}$ et alors \mathcal{D} définie en (2.3) représente des régions convexes et symétriques par rapport à l'axe réel du plan complexe (voir [PABB00] pour les détails). Observons encore que les régions associées à la stabilité de systèmes à temps continu et à temps discret, respectivement le demi-plan complexe gauche et le disque unitaire centré à l'origine, sont retrouvées avec des choix adéquats de \mathcal{R} et $d = 1$

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_C = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right]; \quad \mathcal{R} = \mathcal{R}_D = \left[\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \quad (2.5)$$

Définition 2.1 *Le polytope \mathcal{A} est robustement \mathcal{D} -stable si toutes les valeurs propres de $A(\alpha) \in \mathcal{A}$ appartiennent à la région \mathcal{D} spécifiée par (2.3).*

En suivant les idées de [CG96], une condition basée sur une fonction de Lyapunov dépendante de paramètres qui vérifie si $A(\alpha)$ est \mathcal{D} -stable, est proposée dans le lemme suivant, comme cela est présentée dans [PABB00].

Lemme 2.1 *Le polytope \mathcal{A} est robustement \mathcal{D} -stable si et seulement s'il existe une matrice de Lyapunov dépendante de paramètres, symétrique, définie positive, $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, telle que*

$$R_{11} \otimes P(\alpha) + R_{12} \otimes (P(\alpha)A(\alpha)) + R'_{12} \otimes (A(\alpha)'P(\alpha)) + R_{22} \otimes (A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha)) < \mathbf{0} \quad (2.6)$$

pour tout $A(\alpha) \in \mathcal{A}$.

Cela vaut la peine remarquer que l'approche utilisée dans [RP01a] peut être employée ici pour traiter le problème de dimension infinie en α présent dans le Lemme 2.1. On peut encore observer que, si $P(\alpha) = P$, alors ce qu'on appelle la \mathcal{D} -stabilité quadratique est retrouvée à partir du Lemme 2.1.

Définition 2.2 *Le polytope \mathcal{A} est quadratiquement \mathcal{D} -stable s'il existe une matrice de Lyapunov symétrique, définie positive, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, telle que*

$$R_{11} \otimes P + R_{12} \otimes (PA(\alpha)) + R'_{12} \otimes (A(\alpha)'P) + R_{22} \otimes (A(\alpha)'PA(\alpha)) < \mathbf{0} \quad (2.7)$$

pour tout $A(\alpha) \in \mathcal{A}$.

Le lemme suivant propose une condition équivalente au Lemme 2.1, cette fois-ci en utilisant des variables matricielles additionnelles et une LMI de dimension plus grande que celle employée en (2.6).

Lemme 2.2 *Le polytope \mathcal{A} est robustement \mathcal{D} -stable si et seulement s'il existe une matrice de Lyapunov dépendante de paramètres, symétrique, définie positive, $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et des matrices dépendantes de paramètres $F(\alpha) \in \mathcal{R}^{dn \times dn}$ et $G(\alpha) \in \mathcal{R}^{dn \times dn}$ telles que*

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} R_{11} \otimes P(\alpha) \\ + F(\alpha)(\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')F(\alpha)' \end{array} & \begin{array}{c} R_{12} \otimes P(\alpha) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')G(\alpha) - F(\alpha) \end{array} \\ \hline \star & R_{22} \otimes P(\alpha) - (G(\alpha) + G(\alpha)') \end{array} \right] < \mathbf{0} \quad (2.8)$$

pour tout $A(\alpha) \in \mathcal{A}$. De plus, $P(\alpha)$ solution de (2.8) est aussi solution de (2.6).

Les conditions proposées dans les Lemmes 2.1 et 2.2 sont convexes dans les variables d'optimisation, néanmoins elles sont de dimension infinie en α , ce qui signifie qu'un effort numérique bien grand est nécessaire pour les vérifier (dans le cas où α possède un intervalle continu dans son domaine). Par ailleurs, les conditions établies dans ces deux lemmes n'exigent pas que la matrice $A(\alpha)$ appartienne à l'ensemble convexe \mathcal{A} , équation (2.2), puisque de telles conditions ont besoin d'être vérifiées pour tout α dans le domaine de l'incertitude.

En conséquence, le résultat principal de ce chapitre est présenté : une condition convexe de dimension finie suffisante pour la vérification du Lemme 2.2 dans le cas de \mathcal{A} donné en (2.2).

2.3 Des conditions pour la \mathcal{D} -stabilité du polytope \mathcal{A}

Supposons que les matrices $F(\alpha)$, $G(\alpha)$ et $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ dans le Lemme 2.2 puissent être exprimées comme une combinaison convexe de matrices sommets comme il suit

$$P(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j P_j ; \quad F(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j F_j ; \quad G(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j G_j ; \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 ; \quad \alpha_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (2.9)$$

Donc, une condition suffisante pour la \mathcal{D} -stabilité robuste de \mathcal{A} est donnée par le théorème suivant.

Théorème 2.1 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et des matrices $F_j \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$, $G_j \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$, $j = 1, \dots, N$, telles que*

$$M_j \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} R_{11} \otimes P_j \\ + F_j(\mathbf{I}_d \otimes A_j) + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)F'_j \end{array} & \begin{array}{c} R_{12} \otimes P_j + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)G_j - F_j \end{array} \\ \hline \star & R_{22} \otimes P_j - (G_j + G'_j) \end{array} \right] < \left[\begin{array}{c|c} -(\mathbf{I}_d \otimes \mathbf{I}_n) & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right];$$

$j = 1, \dots, N \quad (2.10)$

$$M_{jk} \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} R_{11} \otimes (2P_j + P_k) + F_j(\mathbf{I}_d \otimes A_k) \\ + (\mathbf{I}_d \otimes A'_k)F'_j + (F_j + F_k)(\mathbf{I}_d \otimes A_j) \\ + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)(F'_j + F'_k) \end{array} & \begin{array}{c} R_{12} \otimes (2P_j + P_k) + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)(G_j + G_k) \\ + (\mathbf{I}_d \otimes A'_k)G_j - (2F_j + F_k) \end{array} \\ \hline \star & \begin{array}{c} R_{22} \otimes (2P_j + P_k) \\ - 2(G_j + G'_j) - (G_k + G'_k) \end{array} \end{array} \right]$$

$< \frac{1}{(N-1)^2} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_d \otimes \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N; k = 1, \dots, N; k \neq j \quad (2.11)$

$$M_{jkl} \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 2R_{11} \otimes (P_j + P_k + P_\ell) \\ + (F_j + F_\ell)(\mathbf{I}_d \otimes A_k) + (\mathbf{I}_d \otimes A'_k)(F'_j + F'_\ell) \\ + (F_j + F_k)(\mathbf{I}_d \otimes A_\ell) + (\mathbf{I}_d \otimes A'_\ell)(F'_j + F'_k) \\ + (F_k + F_\ell)(\mathbf{I}_d \otimes A_j) + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)(F'_k + F'_\ell) \end{array} & \begin{array}{c} 2[R_{12} \otimes (P_j + P_k + P_\ell) \\ - (F_j + F_k + F_\ell)] \\ + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)(G_k + G_\ell) \\ + (\mathbf{I}_d \otimes A_k)(G_j + G_\ell) \\ + (\mathbf{I}_d \otimes A'_\ell)(G_j + G_k) \end{array} \\ \hline \star & \begin{array}{c} R_{22} \otimes 2(P_j + P_k + P_\ell) \\ - 2(G_j + G_k + G_\ell) \\ - 2(G'_j + G'_k + G'_\ell) \end{array} \end{array} \right]$$

$< \frac{6}{(N-1)^2} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_d \otimes \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N-2; k = j+1, \dots, N-1; \ell = k+1, \dots, N \quad (2.12)$

sont vérifiées, alors \mathcal{A} est robustement \mathcal{D} -stable et les conditions du Lemme 2.2 sont vérifiées avec $P(\alpha)$, $F(\alpha)$ et $G(\alpha)$ données en (2.9). De plus, les conditions du Lemme 2.1 sont satisfaites avec cette même matrice $P(\alpha)$.

Preuve : La matrice dépendante de paramètre $P(\alpha)$ donnée par (2.9) avec $P_j > \mathbf{0}$ est, bien sûr, définie positive. En utilisant (2.9) et pour $A(\alpha) \in \mathcal{A}$ on peut écrire

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} R_{11} \otimes P(\alpha) \\ + F(\alpha)(\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')F(\alpha)' \end{array} & \begin{array}{c} R_{12} \otimes P(\alpha) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')G(\alpha) - F(\alpha) \end{array} \\ \hline \star & R_{22} \otimes P(\alpha) - (G(\alpha) + G(\alpha)') \end{array} \right] =$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^3 M_j + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1; k \neq j}^N \alpha_j^2 \alpha_k M_{jk} + \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=j+1}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \alpha_j \alpha_k \alpha_\ell M_{jkl} \quad (2.13)$$

En imposant (2.10)-(2.12) et en considérant que $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \dots, N$, $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$, l'équation (2.13) implique

$$\left[\begin{array}{c|c} \frac{R_{11} \otimes P(\alpha) + F(\alpha)(\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)') + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha))F(\alpha)'}{\star} & R_{12} \otimes P(\alpha) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')G(\alpha) - F(\alpha) \\ \hline & R_{22} \otimes P(\alpha) - (G(\alpha) + G(\alpha)') \end{array} \right] < - \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^3 - \frac{1}{(N-1)^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j; k=1}^N \alpha_j^2 \alpha_k - \frac{6}{(N-1)^2} \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=j+1}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \alpha_j \alpha_k \alpha_\ell \right) \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_d \otimes \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (2.14)$$

Finalement, l'expression du coté droit de (2.14) est semi-définie négative, ce qui assure la faisabilité de (2.8). Voir [LP03a] et [RP01a] pour les détails. ■

Quelques observations par rapport aux LMIs (2.10)–(2.12) et (2.14) sont nécessaires. D'abord, toutes ces LMIs présentent la propriété d'homogénéité, ce qui implique que la matrice du côté droit de (2.14) peut être choisie de forme arbitraire, pourvu qu'elle soit semi-définie positive. Dans ce travail, des matrices indépendantes du paramètre de l'incertitude sont considérées. Cependant, un degré de liberté additionnel est attendu quand cette matrice là est substituée par une matrice dépendante du paramètre incertain, mais ce cas n'est pas objet d'investigation ici (voir par exemple [LKH04]).

Pour des systèmes précisément connus, c'est-à-dire, avec $N = 1$, seulement la condition (2.10) a besoin d'être vérifiée (avec P_1 , F_1 et G_1). Naturellement, l'ensemble de LMIs (2.12) n'a besoin d'être vérifié que pour des systèmes incertains avec $N \geq 3$.

Comme illustration de régions plus communément utilisées pour l'analyse de stabilité, considérons les régions correspondantes au demi-plan gauche et au disque unitaire centré à l'origine (définies respectivement pour R_C et R_D , en (2.5)). Pour ces régions le Théorème 2.1 a des matrices M_j , M_{jk} et M_{jkl} données par

$$M_j \equiv M_j^C \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \frac{F_j A_j + A_j' F_j'}{\star} & \frac{P_j + A_j' G_j - F_j}{-G_j - G_j'} \end{array} \right] < \left[\begin{array}{c|c} -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N \quad (2.15)$$

$$M_{jk} \equiv M_{jk}^C \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \frac{F_j A_k + A_k' F_j' + (F_j + F_k) A_j + A_j' (F_j' + F_k')}{\star} & \frac{2P_j + P_k + A_j' (G_j + G_k) + A_k' G_j - 2F_j - F_k}{-2(G_j + G_j') - G_k - G_k'} \end{array} \right] < \frac{1}{(N-1)^2} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N; k = 1, \dots, N; k \neq j \quad (2.16)$$

$$M_{jkl} \equiv M_{jkl}^C \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \frac{\begin{array}{l} (F_j + F_\ell) A_k + A_k' (F_j' + F_\ell') \\ + (F_j + F_k) A_\ell + A_\ell' (F_j' + F_k') \\ + (F_k + F_\ell) A_j + A_j' (F_k' + F_\ell') \end{array}}{\star} & \frac{\begin{array}{l} 2(P_j + P_k + P_\ell - F_j + F_k + F_\ell) \\ + A_j' (G_k + G_\ell) + A_k' (G_j + G_\ell) \\ + A_\ell' (G_j + G_k) \end{array}}{-2(G_j + G_k + G_\ell) + G_j' + G_k' + G_\ell'} \end{array} \right] < \frac{6}{(N-1)^2} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N-2; k = j+1, \dots, N-1; \ell = k+1, \dots, N \quad (2.17)$$

pour des systèmes à temps continu et

$$M_j \equiv M_j^D \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \frac{-P_j + F_j A_j + A_j' F_j'}{\star} & \frac{A_j' G_j - F_j}{P_j - (G_j + G_j')} \end{array} \right] < \left[\begin{array}{c|c} -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N \quad (2.18)$$

$$M_{jk} \equiv M_{jk}^D \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} -(2P_j + P_k) + F_j A_k + A'_k F'_j \\ (F_j + F_k) A_j + A'_j (F'_j + F'_k) \end{array} & \begin{array}{l} A'_j (G_j + G_k) \\ + A'_k G_j - (2F_j + F_k) \end{array} \\ \hline \star & \begin{array}{l} 2P_j + P_k \\ -2(G_j + G'_j) - (G_k + G'_k) \end{array} \end{array} \right] \\ < \frac{1}{(N-1)^2} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N; k = 1, \dots, N; k \neq j \quad (2.19)$$

$$M_{jkl} \equiv M_{jkl}^D \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} -2(P_j + P_k + P_\ell) \\ + (F_j + F_\ell) A_k + A'_k (F'_j + F'_\ell) \\ + (F_j + F_k) A_\ell + A'_\ell (F'_j + F'_k) \\ + (F_k + F_\ell) A_j + A'_j (F'_k + F'_\ell) \end{array} & \begin{array}{l} -2(F_j + F_k + F_\ell) + (G_k + A'_j G_\ell) \\ + A'_k (G_j + G_\ell) + A'_\ell (G_j + G_k) \end{array} \\ \hline \star & \begin{array}{l} 2(P_j + P_k + P_\ell - G_j - G_k - G_\ell) \\ -G'_j - G'_k - G'_\ell \end{array} \end{array} \right] \\ < \frac{6}{(N-1)^2} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N-2; k = j+1, \dots, N-1; \ell = k+1, \dots, N \quad (2.20)$$

pour des systèmes à temps discret.

Notons encore que le résultat principal présenté dans [PABB00] peut être retrouvé dans les conditions du Théorème 2.1, simplement en posant $F_j = F$, $G_j = G$, $j = 1, \dots, N$ et en utilisant la propriété d'homogénéité des LMIs. Dans le cas de la \mathcal{D} -stabilité quadratique, seulement (2.10) a besoin d'être vérifiée car, dans ce cas, (2.11) et (2.12) sont toujours vérifiées. Ce fait peut être vérifié en faisant la somme de versions des M_j dans l'équation (2.10).

Les conditions du Théorème 2.1 peuvent aussi redonner une condition Schur-équivalente à celles présentées dans [RP01a], formulées pour les cas des systèmes à temps discret, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_D$. Pour cela, on impose $F_j = \mathbf{0}$ et $G_j = G'_j = P_j$, $j = 1, \dots, N$ dans (2.18)-(2.20). Pour le cas à temps continu, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_C$, le choix $F_j = F'_j = P_j$, $j = 1, \dots, N$ dans (2.15)-(2.17) récupère dans les blocs (1,1) des LMIs des résultats moins conservatifs que ceux présentés dans [RP02], à cause du plus grand degré en α utilisé dans (2.14).

La différence principale entre les approches présentées dans [RP01a] et [RP02] est le degré en α avec lequel le côté droit de (2.13) est écrit. Dans [RP01a] une fonction de degré trois est utilisée, ainsi que dans les conditions du Théorème 2.1 (voir (2.14)), tandis que dans [RP02] une fonction de degré deux est employée. Des expérimentations numériques ont démontré que l'augmentation du degré de la fonction en α_j au côté droit de (2.14) mène à des conditions chaque fois moins conservatives mais à un coût de calcul chaque fois plus cher. L'augmentation de l'ordre de cette fonction en α_j peut être réussie, par exemple, par la multiplication successive des deux côtés de (2.14) par n'importe quelle puissance de $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$. L'obtention des conditions chaque fois moins conservatives avec cette technique possède des connexions avec le Théorème de Pólya (voyez [HLP52]), mais la recherche de ces conditions est laissée pour des travaux futurs.

Un résultat similaire à celui présenté dans le Théorème 2.1 peut être obtenu en utilisant les idées présentées dans [RP02], c'est-à-dire, en utilisant une expression de degré deux à la place de degré trois du côté droit de (2.13) et (2.14). Ces conditions possèdent une complexité numérique plus petite mais sont plus conservatives que celles-là présentées dans le Théorème 2.1.

Théorème 2.2 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et des matrices $F_j \in$*

$\mathbb{R}^{dn \times dn}$ et $G_j \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$, $j = 1, \dots, N$, telles que (2.10) et

$$\tilde{M}_{jk} \triangleq \left[\begin{array}{c|c} R_{11} \otimes (P_j + P_k) + F_j(\mathbf{I}_d \otimes A_k) + (\mathbf{I}_d \otimes A'_k)F'_j & R_{12} \otimes (P_j + P_k) + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)G_k \\ + F_k(\mathbf{I}_d \otimes A_j) + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)F'_k & + (\mathbf{I}_d \otimes A'_k)G_j - F_j - F_k \\ \hline \star & R_{22} \otimes (P_j + P_k) \\ & - G_j - G'_j - G_k - G'_k \end{array} \right]$$

$$< \frac{2}{N-1} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_d \otimes \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad j = 1, \dots, N-1; k = j+1, \dots, N; \quad (2.21)$$

sont vérifiées, alors \mathcal{A} est robustement \mathcal{D} -stable et les conditions du Lemme 2.2 et du Théorème 2.1 sont vérifiées avec $F(\alpha)$, $G(\alpha)$ et la matrice de Lyapunov dépendante de paramètres $P(\alpha)$ données en (2.9).

Preuve : Cette preuve est similaire à celle du Théorème 2.1. Notons que, en considérant $A(\alpha) \in \mathcal{A}$ et avec les matrices $F(\alpha)$, $G(\alpha)$ et $P(\alpha)$ données en (2.9), on a $P(\alpha) > \mathbf{0}$ et

$$\left[\begin{array}{c|c} R_{11} \otimes P(\alpha) & R_{12} \otimes P(\alpha) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')G(\alpha) - F(\alpha) \\ + F(\alpha)(\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')F(\alpha)' & \\ \hline \star & R_{22} \otimes P(\alpha) - (G(\alpha) + G(\alpha)') \end{array} \right] =$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2 M_j + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \alpha_j \alpha_k \tilde{M}_{jk} \quad (2.22)$$

En imposant (2.10) et (2.21) et en considérant que $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \dots, N$, $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$, alors l'équation (2.22) implique

$$\left[\begin{array}{c|c} R_{11} \otimes P(\alpha) & R_{12} \otimes P(\alpha) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')G(\alpha) - F(\alpha) \\ + F(\alpha)(\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')F(\alpha)' & \\ \hline \star & R_{22} \otimes P(\alpha) - (G(\alpha) + G(\alpha)') \end{array} \right] <$$

$$- \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^2 - \frac{2}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \alpha_j \alpha_k \right) \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_d \otimes \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \leq \mathbf{0} \quad (2.23)$$

puisque l'expression dans les parenthèses est toujours plus grande ou égale à zéro :

$$\sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N (\alpha_j - \alpha_k)^2 = (N-1) \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 - 2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \alpha_j \alpha_k \geq 0 \quad (2.24)$$

■

Comme dans le cas du Théorème 2.1, les conditions du Théorème 2.2 contiennent le cas de \mathcal{D} -stabilité robuste proposé dans [PABB00] et les conditions proposées dans [RP02]. D'autre part, il n'est pas possible à partir de ces conditions de retrouver celles proposées dans [RP01a] à cause de la différence de degré en α_j du côté droit de (2.14) et (2.23). Pour cette raison, les conditions du Théorème 2.2 ne sont que suffisantes pour la faisabilité des LMIs proposées dans le Théorème 2.1.

Les conditions des Théorèmes 2.1 et 2.2 contiennent la \mathcal{D} -stabilité quadratique. Cette dernière peut être obtenue en posant $F_j = F$, $G_j = G$ et $P_j = P = P' > \mathbf{0}$, $j = 1, \dots, N$. Dans ce cas, seule la condition (2.10) a besoin d'être vérifiée (les autres peuvent être écrites comme une somme de termes de celle-ci). Ce résultat est présenté dans le corollaire suivant.

Corollaire 2.1 *Le polytope \mathcal{A} est quadratiquement \mathcal{D} -stable si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée*

i) *Il existe une matrice symétrique définie positive $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que*

$$\begin{bmatrix} R_{11} \otimes P + R_{12} \otimes PA_j + R'_{12} \otimes A'_j P & L \otimes A'_j P \\ \star & -\mathbf{I}_d \otimes P \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (2.25)$$

avec $R_{22} = LL'$.

ii) *Il existe une matrice symétrique définie positive $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et des matrices $G \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$ et $F \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$ telles que*

$$\left[\begin{array}{c|c} R_{11} \otimes P + F(\mathbf{I}_d \otimes A_j) + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)F' & R_{12} \otimes P + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)G - F \\ \hline \star & R_{22} \otimes P - (G + G') \end{array} \right] < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (2.26)$$

Étant donné que les deux conditions du Corollaire 2.1 sont nécessaires et suffisantes pour l'analyse de \mathcal{D} -stabilité quadratique, il est intéressant de souligner que la condition proposée en *i)* possède une complexité numérique plus petite que celle de la condition *ii)*. En revanche, dans le cas de synthèse de contrôleurs (qui n'est pas présenté ici, voir [dOBG99] et [PABB00] pour les détails) la seconde condition présente des avantages sur la première.

2.4 Analyse des conditions LMIs

2.4.1 Complexité numérique

Les conditions suffisantes présentées ici pour la \mathcal{D} -stabilité robuste d'un polytope de matrices, c'est-à-dire les conditions proposées dans les Théorèmes 2.1 (SC₁) et 2.2 (SC₂) et dans le Corollaire 2.1 *i)* (SQ₁) et *ii)* (SQ₂), s'expriment toutes par des tests de faisabilité d'un ensemble de LMIs. Des nos jours il y a des algorithmes efficaces basés sur des méthodes de points intérieurs, de complexité polynomiale, pour la résolution de ces problèmes. La complexité de problèmes formulés par des LMIs est associée au nombre \mathcal{K} de variables en échelle et aussi au nombre \mathcal{L} de lignes du système d'équations (LMIs). Le nombre d'opérations en point flottant ou le temps nécessaire pour résoudre un problème en utilisant des méthodes de points intérieurs du *LMI Control Toolbox* du Matlab [GNLC95], est proportionnel à $\mathcal{K}^3 \mathcal{L}$. D'autres programmes peuvent présenter une performance différente. Voir aussi [BEFB94] pour des commentaires sur des méthodes de résolution de LMIs.

La Table 2.1 montre les valeurs de \mathcal{K} et \mathcal{L} pour chaque test présenté — SC₁, SC₂, SQ₁ et SQ₂ — n étant le nombre d'états du système, N le nombre de sommets du polytope et d l'ordre de la région considérée. Dans cette table, les complexités associées aux tests de stabilité proposés dans [RP01a] (cas à temps discret, SR₁), [RP02] (cas à temps continu, SR₂) et [PABB00] (SE) sont montrées. Les expressions pour \mathcal{K} et \mathcal{L} pour les cas à temps continu et à temps discret sont aussi présentées.

Les conditions SQ₁ et SQ₂ présentent des complexités moins grandes que tous les autres critères, néanmoins les résultats produits sont plus conservatifs. Une comparaison plus détaillée de la complexité des méthodes SE, SR₁ et SR₂, toutes moins conservatives que SQ₁ et SQ₂ et basées sur des fonctions de Lyapunov dépendantes de paramètres, est dépeinte dans la Figure 2.1 pour le cas à temps discret et dans la Figure 2.2 pour le cas à temps continu. Dans le cas à temps discret, la complexité du critère SR₁ est

Critère		\mathcal{K} (n. de variables)	\mathcal{L} (n. de lignes)
SC_1	Région \mathcal{D}	$\frac{Nn}{2} (1 + (4d^2 + 1)n)$	$\frac{Nn}{3} (d(N^2 + 3N + 2) + 3)$
	\mathcal{R}_C ou \mathcal{R}_D	$\frac{Nn}{2} (5n + 1)$	$\frac{Nn}{3} (N^2 + 3N + 5)$
SC_2	Région \mathcal{D}	$\frac{Nn}{2} (1 + (4d^2 + 1)n)$	$Nn (1 + d(N + 1))$
	\mathcal{R}_C ou \mathcal{R}_D	$\frac{Nn}{2} (5n + 1)$	$Nn (N + 2)$
SQ_1	Région \mathcal{D}	$\frac{n}{2} (n + 1)$	$2dNn$
	\mathcal{R}_C ou \mathcal{R}_D	$\frac{n}{2} (n + 1)$	$2Nn$
SQ_2	Région \mathcal{D}	$\frac{n}{2} (1 + (1 + 4d^2)n)$	$(2dN + 1)n$
	\mathcal{R}_C ou \mathcal{R}_D	$\frac{n}{2} (5n + 1)$	$(2N + 1)n$
SE	Région \mathcal{D}	$\frac{n}{2} (N + (N + 4d^2)n)$	$Nn (2d + 1)$
	\mathcal{R}_C ou \mathcal{R}_D	$\frac{n}{2} (N + (N + 4)n)$	$3Nn$
SR_1	\mathcal{R}_D	$\frac{Nn}{2} (n + 1)$	$\frac{Nn}{6} (N^2 + 3N + 8)$
SR_2	\mathcal{R}_C	$\frac{Nn}{2} (n + 1)$	$\frac{Nn}{2} (N + 3)$

TAB. 2.1 – Nombre de variables scalaires (\mathcal{K}) et nombre de lignes LMI (\mathcal{L}) en fonction du nombre d'états (n), sommets (N) et ordre de la région (d), quand pertinent, pour les conditions proposées dans les Théorèmes 2.1 (SC_1) et 2.2 (SC_2), dans le Corollaire 2.1 *i*) (SQ_1) et *ii*) (SQ_2), en [PABB00] (SE), en [RP01a] (SR_1) pour le cas à temps discret et en [RP02] (SR_2) pour le cas à temps continu.

moins grande que celle du SE pour $N \leq 5$ et plus grande pour $N > 6$, indépendamment de n . Pour $N = 8$ et $n \geq 3$ la complexité associée à SR_1 est à peu près deux fois plus grande que celle du critère SE (voir Figure 2.1.(a)). Dans la Figure 2.1.(b) la complexité relative SR_1/SE est montrée par rapport au nombre de sommets. On peut observer que l'influence de N^3 dans le critère SR_1 devient rapidement le facteur prépondérant de ce quotient.

Comme dans le cas à temps discret, la Figure 2.2.(a) décrit la complexité relative SR_2/SE en fonction du nombre d'états n pour plusieurs valeurs de N . On peut apercevoir que la complexité du critère SR devient plus grande que celle du SE pour $N > 11$. Dans la Figure 2.2.(b) la complexité relative SR_2/SE est exprimée par rapport au nombre de sommets. On peut aussi observer que l'influence de N^2 dans le critère SR_2 devient le facteur prépondérant pour des valeurs grandes de N ($N > 20$), indépendamment du nombre d'états n .

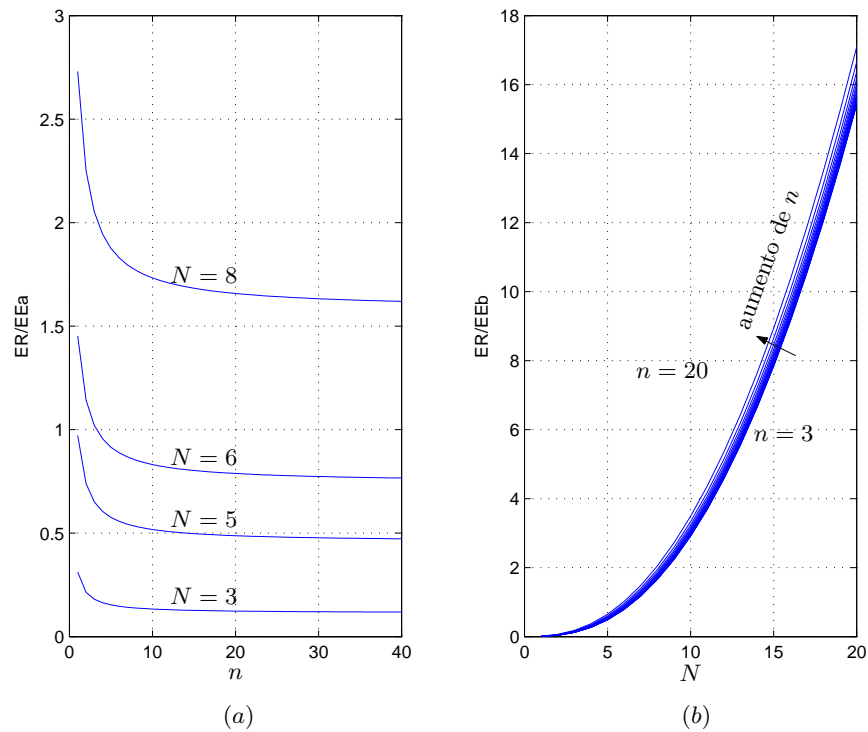


FIG. 2.1 – Complexité numérique relative (a) SR_1/SE en fonction du nombre d'états n et (b) SR_2/SE par rapport au nombre de sommets N (cas à temps discret).

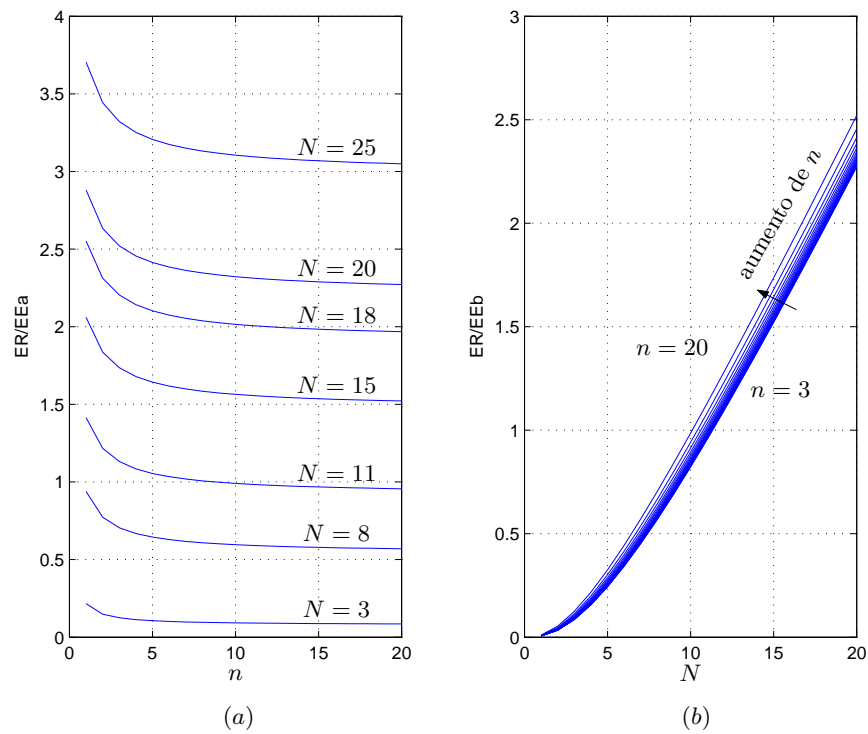


FIG. 2.2 – Complexité numérique relative (a) SR_2/SE en fonction du nombre d'états n et (b) SR_2/SE par rapport au nombre de sommets N (cas à temps continu).

Sûrement, les critères SC_1 et SC_2 sont de plus grande complexité, puisqu'ils possèdent plus de variables en échelle et plus de lignes de LMIs que tous les autres. Toutefois, ces critères continuent à être résolus en temps polynomial par des algorithmes spécialisés de points intérieurs. Le critère SC_1 possède une complexité plus grande que SC_2 , car ce dernier utilise une augmentation basée sur une fonction de degré deux en α_j , alors que le premier utilise une augmentation de degré trois, équation (2.14). Une comparaison de complexité entre les critères SC_1 et SC_2 montre que le rapport de complexité (en assumant la proportionnalité à $\mathcal{K}^3\mathcal{L}$) est donné par

$$\mathcal{K}^3\mathcal{L} \left(\frac{SC_1}{SC_2} \right) = \frac{N^2 + 3N + 5}{3(N + 2)} \cong 0.3265N + 0.5118 \quad (2.27)$$

Cette évaluation nous enseigne que l'augmentation dans le degré de la fonction en α_j de deux à trois résulte dans un ajout relatif de complexité numérique qui varie de façon linéaire avec le nombre de sommets du polytope, N , et ne dépend pas du nombre d'états, n . Utilisant (2.27) on aperçoit que la complexité numérique de SC_1 double par rapport à celle de SC_2 quand le nombre de sommets N passe de 4 à 5.

2.4.2 Le temps de calcul

Quelques expérimentations numériques ont été réalisées afin de donner une estimation du temps de calcul nécessaire pour que chacune des conditions LMI considérées obtienne une solution faisable. Les conditions des Théorèmes 2.1 et 2.2 ont été considérées dans des versions particulières, c'est-à-dire, avec M_j , M_{jk} et M_{jkl} données par (2.15)-(2.17) pour le cas à temps continu et par (2.18)-(2.20) pour le cas à temps discret.

Comme attendu, la complexité numérique associée à la condition LMI la moins conservative, du Théorème 2.1, est la plus grande de toutes les conditions, cependant elle n'est pas prohibitive. Le temps moyen pour chaque test avec $n = 2$ et $N = 2$ reste au-dessous de 20 ms pour tous les méthodes (dans les deux cas : à temps continu et à temps discret). Pour les systèmes avec $n = 5$ et $N = 5$ les temps de calcul trouvés pour le cas à temps continu ont été de 40 ms (SQ_1), 70 ms (SE), 24 ms (SR_2), 101 s (SC_1) et 37 s (SC_2) (pour des systèmes à temps discret, 40 ms, 75 ms, 1.9 s 101 s et 37 s, respectivement). Les tests ont été faits avec un ordinateur muni d'un processeur AMD K7 Athlon 1.4 GHz, avec 256 Mbytes de RAM, en utilisant *Matlab* et le *LMI Control Toolbox* [GNLC95]. On peut voir aussi [dOOL⁺02b] pour une comparaison numérique par rapport aux critères SQ_1 , SE, SR_1 et SR_2 et [LP03a] pour d'autre comparaison y compris avec les critères SC_1 et SC_2 .

2.5 Conclusion

Des conditions formulées en termes de tests de faisabilité d'un ensemble de LMIs définies par les sommets du polytope d'incertitude ont été proposées pour l'étude de la \mathcal{D} -stabilité robuste de systèmes linéaires incertains dans des domaines polytopiques. Même si ces conditions présentent une complexité numérique plus grande que d'autres basées sur des fonctions de Lyapunov linéaires dépendants de paramètres, l'amélioration dans le nombre de polytopes stables identifiés est significative (voir [LP03a]). En particulier la condition du Théorème 2.1 donne une évaluation positive par rapport aux autres conditions. Même avec un nombre plus élevé de variables en échelle et de lignes dans les LMIs, les conditions du Théorème 2.1 peuvent être calculées en temps polynomial avec des algorithmes de points intérieurs. À

partir des résultats présentés, plusieurs extensions et généralisations peuvent être pressenties, comme par exemple, les problèmes de coûts garantis \mathcal{H}_2 [dOL⁺04a] et \mathcal{H}_∞ [dOL⁺04b].

Chapitre 3

\mathcal{D} -stabilité robuste de matrices polynomiales

Des conditions suffisantes pour la \mathcal{D} -stabilité robuste d'un polytope de matrices polynomiales, c'est-à-dire, des tests qui assurent l'appartenance de tous les zéros d'un polynôme matriciel incertain à une région \mathcal{D} du plan complexe, sont proposées dans ce chapitre. Ces tests de stabilité robuste sont formulés en termes de LMIs définies aux sommets du polytope d'incertitude. Si ces tests sont faisables, alors ils fournissent une fonction de Lyapunov dépendante de paramètres qui assure la stabilité de tous les polynômes matriciels dans le domaine d'incertitude considéré. On analyse les cas de stabilité à temps continu (demi-plan gauche) et à temps discret (dans le disque unitaire). Ces conditions généralisent et contiennent d'autres conditions de la littérature. Elles fournissent également une méthode numérique efficace pour l'analyse de \mathcal{D} -stabilité robuste de polynômes matriciels. Les résultats présentés dans ce chapitre peuvent être partiellement trouvés dans [LOdP04] et [dOLP04].

3.1 Introduction

Des tests de stabilité de polynômes ont joué un rôle d'importance dans la littérature spécialisée ces dernières années, comme par exemple le résultat de Kharitonov [Kha78] pour des polynômes aux coefficients définis par des intervalles, ou le théorème dit “théorème des bornes” [BHL88] pour les polytopes de polynômes. Il faut voir [Bar94] et [BCK95] pour plus de détails sur la stabilité robuste de polynômes. Cependant, l'extension de ces résultats pour traiter des polytopes de matrices polynomiales ne semble pas immédiate et des tests conclusifs sur la stabilité de familles de polynômes dont les coefficients sont des fonctions multilinéaires des paramètres d'incertitude sont des problèmes connus comme NP-difficiles [BT00].

Dans [HAPŠ01], des conditions formulées en termes de LMIs récemment publiées dans la littérature pour tester la stabilité d'un polytope de matrices [GdOH98], [dOBG99], [PABB00] ont été étendues au cas de polytope de matrices polynomiales. Toutefois, plus récemment de nouvelles conditions LMIs, moins conservatives que les dernières, ont été publiées pour l'analyse de stabilité de systèmes linéaires à temps discret [RP01a] et à temps continu [RP01b], [RP02].

Dans ce chapitre, des conditions suffisantes pour la \mathcal{D} -stabilité robuste de polytopes de matrices polynomiales sont formulées en termes de LMIs, qui sont obtenues à partir de l'extension des résultats de [LP03a] (aussi discutés dans le Chapitre 2). Ces conditions aboutissent à des résultats moins conservatifs que ceux obtenus par les méthodes basées sur la stabilité quadratique et aussi moins conservatifs que les résultats de [HAPŠ01], surtout quand la complexité (c'est-à-dire, l'ordre et le nombre de sommets) des

polytopes de matrices polynomiales est augmentée. La \mathcal{D} -stabilité robuste du polytope est assurée par un test simple de faisabilité sur l'ensemble de LMIs, qui sont définies aux sommets du domaine d'incertitude, et peuvent être résolues de façon efficace à l'aide des algorithmes de complexité polynomiale [GNLC95].

3.2 Préliminaires

Considérons une matrice polynomiale carrée $A(s)$ de dimension n et degré g avec coefficients $A^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, 1, \dots, g$, définie comme

$$A(s) = A^0 + A^1 s + \dots + A^g s^g \quad (3.1)$$

où $s \in \mathbb{C}$. Définissons la matrice constante $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times (g+1)n}$, associée à $A(s)$ comme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A^0 & A^1 & \dots & A^{g-1} & A^g \end{bmatrix}; \quad A^g = \mathbf{I}_n \quad (3.2)$$

dont l'espace nul à droite $\mathcal{N}_{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{(g+1)n \times gn}$, c'est-à-dire $\mathbf{A}\mathcal{N}_{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$, peut être donné par

$$\mathcal{N}_{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{I}_g \otimes \mathbf{I}_n \\ -A^0 \quad -A^1 \quad \dots \quad -A^{g-1} \end{array} \right] \quad (3.3)$$

Un zéro de $A(s)$ est défini comme [Kai80] la valeur complexe ζ pour laquelle on a une perte du rang de la matrice $A(s)$, c'est-à-dire, $\text{rang}\{A(\zeta)\} < \text{rang}\{A(s)\}$, et il peut être déterminé par le calcul du déterminant de $A(s)$. Notons aussi que, pour une sous-région \mathcal{D} du plan complexe, le problème d'analyse de \mathcal{D} -stabilité de $A(s)$ se résume à déterminer des conditions qui assurent que tous les zéros de $A(s)$ appartiennent à \mathcal{D} . L'objectif de ce chapitre est de chercher des conditions qui puissent assurer la \mathcal{D} -stabilité robuste de matrices polynomiales incertaines, $A(s, \alpha)$. En d'autres termes, on veut déterminer des conditions qui vérifient si tous les zéros de $A(s, \alpha)$ appartiennent à une région bien déterminée \mathcal{D} du plan complexe pour tous les α admissibles. Pour cela, on considère la description de la région convexe \mathcal{D} donnée en (2.3), en ne prenant que des régions d'ordre $d = 1$, c'est-à-dire, pour $R_{11} = r_{11}$, $R_{12} = r_{12}$ et $R_{22} = r_{22}$ scalaires. Ainsi, on considère dans ce chapitre la portion du plan complexe déterminée par

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} 1 & z \end{bmatrix} \mathcal{R} \begin{bmatrix} 1 & z \end{bmatrix}^* < 0 \right\} \quad (3.4)$$

où

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix}; \quad r_{22} \geq 0 \quad (3.5)$$

Comme dans le Chapitre 2, le demi-plan gauche et le disque unitaire à l'origine du plan complexe forment des régions d'intérêt particulier, pour lesquelles on a, respectivement, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_C$ et $\mathcal{R} = \mathcal{R}_D$ donnés dans (2.5). Pour des détails par rapport aux autres façons de définition de régions du plan complexe, voir [CG96], [HAPŠ01], [HBŠ01], [PABB00]. On suppose, sans perte de généralité et aussi par simplicité, qu'il n'y a pas de matrices polynomiales incertaines avec des zéros à l'infini, et aussi que le terme de degré g est une matrice du type identité de dimension n , $A^g \equiv \mathbf{I}_n$ [HBŠ01].

Similairement au cas précisément connu, définissons pour la j -ème matrice polynomiale

$$A_j(s) = A_j^0 + A_j^1 s + \dots + \mathbf{I}_n s^g \quad (3.6)$$

de dimension n et degré g la j -ème matrice constante $A_j \in \mathbb{R}^{n \times (g+1)n}$ donnée par

$$A_j = \begin{bmatrix} A_j^0 & A_j^1 & \cdots & A_j^g \end{bmatrix}; \quad A_j^g = \mathbf{I}_n \quad (3.7)$$

Ainsi, étant données N matrices polynomiales de dimension n et degré g , aux coefficients réels représentées par A_j , $j = 1, \dots, N$, on définit le polytope \mathbb{A} qui contient les matrices

$$A(s, \alpha) = \alpha_1 A_1(s) + \cdots + \alpha_N A_N(s); \quad \alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$$

comme

$$\mathbb{A} \triangleq \left\{ A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times gn} : A(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j; \quad \alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 \right\} \quad (3.8)$$

En dénotant par $\mathcal{N}_{A_j} \in \mathbb{R}^{(g+1)n \times gn}$ une base de l'espace nul à droite de la matrice A_j , c'est-à-dire, $A_j \mathcal{N}_{A_j} = \mathbf{0}$, et en reprenant que par hypothèse $A^g = \mathbf{I}_n$, on a

$$\mathcal{N}_{A_j} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_g \otimes \mathbf{I}_n \\ -A_j^0 & -A_j^1 & \cdots & -A_j^{g-1} \end{bmatrix}; \quad j = 1, \dots, N \quad (3.9)$$

Notons que, en utilisant cette structure pour la matrice \mathcal{N}_{A_j} , $\mathcal{N}_{A(\alpha)}$ est une base pour l'espace nul à droite de $A(\alpha)$ qui s'écrit comme

$$\mathcal{N}_{A(\alpha)} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \mathcal{N}_{A_j}; \quad \alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 \quad (3.10)$$

Comme dans [HAPŠ01], on définit la matrice de projection $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^{2gn \times (g+1)n}$

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_g \otimes \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{gn \times n} \\ \mathbf{0}_{gn \times n} & \mathbf{I}_g \otimes \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Dans ce qui suit, des définitions et des conditions essentielles trouvées dans la littérature et qui sont utilisées après pour l'obtention du résultat principal sont présentées.

Définition 3.1 *La matrice polynomiale $A(s)$ donnée en (3.1) est \mathcal{D} -stable si tous ces zéros appartiennent à la région \mathcal{D} du plan complexe décrite par (3.4)-(3.5).*

Une condition pour la vérification de \mathcal{D} -stabilité d'un polynôme matriciel précisément connu est donnée dans le lemme suivant.

Lemme 3.1 *La matrice polynomiale $A(s)$ est \mathcal{D} -stable si et seulement s'il existe une matrice définie positive $P = P' \in \mathbb{R}^{gn \times gn}$ telle que*

$$\mathcal{N}_A' \mathcal{T}' (\mathcal{R} \otimes P) \mathcal{T} \mathcal{N}_A < 0 \quad (3.12)$$

Pour le cas incertain, considérez la définition suivante de \mathcal{D} -stabilité robuste.

Définition 3.2 *Le polytope de matrices polynomiales \mathbb{A} est robustement \mathcal{D} -stable si tous les zéros de $A(\alpha) \in \mathbb{A}$ appartiennent à la région \mathcal{D} décrite par (3.4)-(3.5).*

Des conditions nécessaires et suffisantes pour la \mathcal{D} -stabilité robuste de $A(\alpha) \in \mathbb{A}$ sont données dans le lemme suivant.

Lemme 3.2 *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- a) *Le polytope de matrices polynomiales \mathbb{A} est robustement \mathcal{D} -stable.*
- b) *Il existe une matrice définie positive et dépendante de paramètres $P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{gn \times gn}$ telle que*

$$\mathcal{N}'_{A(\alpha)} \mathcal{T}'(\mathcal{R} \otimes P(\alpha)) \mathcal{T} \mathcal{N}_{A(\alpha)} < \mathbf{0} \quad (3.13)$$

- c) *Il existe une matrice définie positive et dépendante de paramètres $P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{gn \times gn}$ et une matrice dépendante de paramètres $Q(\alpha) \in \mathbb{R}^{2gn \times n}$ telles que*

$$\mathbf{M}(\alpha) \triangleq \mathcal{T}'(\mathcal{R} \otimes P(\alpha)) \mathcal{T} + A(\alpha)' Q(\alpha)' \mathcal{T} + \mathcal{T}' Q(\alpha) A(\alpha) < \mathbf{0} \quad (3.14)$$

Notons que la \mathcal{D} -stabilité de $A(\alpha)$ dans le polytope \mathbb{A} peut être vérifiée par l'existence de $P(\alpha) = P(\alpha)'$ dans l'équation (3.13) ou (3.14). Dans cette dernière équation, une variable matricielle additionnelle, $Q(\alpha)$, est jointe. Cependant, un nombre infini de points α (dans le cas où α est continu dans ce domaine) aurait besoin d'être vérifié pour assurer la stabilité de tout le polytope \mathbb{A} .

Une simplification largement employée dans la littérature consiste à utiliser une même matrice $P = P'$, fixe et indépendante du paramètre, pour assurer la \mathcal{D} -stabilité de tout le polytope \mathbb{A} . Dans ce cas on a la \mathcal{D} -stabilité quadratique de \mathbb{A} .

Lemme 3.3 *Le polytope de matrices polynomiales \mathbb{A} est quadratiquement \mathcal{D} -stable s'il existe une matrice définie positive indépendante du paramètre, $P = P \in \mathbb{R}^{gn \times gn}$, telle que*

$$\mathcal{N}'_{A_j} \mathcal{T}'(\mathcal{R} \otimes P) \mathcal{T} \mathcal{N}_{A_j} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (3.15)$$

Dans la suite, on donne des conditions suffisantes pour la \mathcal{D} -stabilité robuste du polytope \mathbb{A} , exprimées comme un ensemble fini de LMIs décrites aux sommets de \mathbb{A} .

3.3 Conditions pour la \mathcal{D} -stabilité du polytope \mathbb{A}

Dans le théorème suivant sont fournies des conditions suffisantes pour la \mathcal{D} -stabilité robuste de \mathbb{A} par rapport à la région générale du plan complexe donnée par la matrice \mathcal{R} , à partir d'un nombre fini de LMIs.

Théorème 3.1 *Le polytope de matrices polynomiales \mathbb{A} est robustement \mathcal{D} -stable s'il existe des matrices définies positives $P_j = P'_j \in \mathbb{R}^{gn \times gn}$ et des matrices $Q_j \in \mathbb{R}^{2gn \times n}$, $j = 1, \dots, N$, qui résolvent le problème de faisabilité pour les LMIs suivantes*

$$\mathbf{M}_j \triangleq \mathcal{T}'(\mathcal{R} \otimes P_j) \mathcal{T} + A'_j Q'_j \mathcal{T} + \mathcal{T}' Q_j A_j < -(\mathbf{I}_{g+1} \otimes \mathbf{I}_n); \quad j = 1, \dots, N \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{jk} \triangleq \mathcal{T}'[\mathcal{R} \otimes (2P_j + P_k)] \mathcal{T} + (A'_j Q'_j + A'_j Q'_k + A'_k Q'_j) \mathcal{T} + \mathcal{T}'(Q_j A_j + Q_k A_j + Q_j A_k) < \frac{1}{(N-1)^2} (\mathbf{I}_{g+1} \otimes \mathbf{I}_n); \\ j = 1, \dots, N, \quad k \neq j, \quad k = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
M_{jkl} &\triangleq 2\mathcal{T}' [\mathcal{R} \otimes (P_j + P_k + P_\ell)] \mathcal{T} + (A'_j Q'_\ell + A'_\ell Q'_j + A'_k Q'_\ell + A'_\ell Q'_k + A'_j Q'_k + A'_k Q'_j) \mathcal{T} \\
&\quad + \mathcal{T}' (Q_j A_\ell + Q_\ell A_j + Q_k A_\ell + Q_\ell A_k + Q_k A_j + Q_j A_k) < \frac{6}{(N-1)^2} (\mathbf{I}_{g+1} \otimes \mathbf{I}_n); \\
j &= 1, \dots, N-2, \quad k = j+1, \dots, N-1, \quad \ell = k+1, \dots, N \quad (3.18)
\end{aligned}$$

où \mathcal{N}_{A_j} et \mathcal{T} sont données dans (3.9) et (3.11), respectivement. Dans le cas positif, la matrice définie positive $P(\alpha)$ donnée par

$$P(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j P_j > 0, \quad \alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 \quad (3.19)$$

et la matrice

$$Q(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j Q_j > 0, \quad \alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 \quad (3.20)$$

satisfont les conditions du Lemme 3.2.

D'abord notons que l'imposition de $(\mathbf{I}_{g+1} \otimes \mathbf{I}_n)$ dans le côté droit de (3.16)-(3.18) peut être faite sans perte de généralité, puisque ces équations sont homogènes en P_j et la \mathcal{D} -stabilité des sommets est une condition nécessaire pour la \mathcal{D} -stabilité du domaine \mathbb{A} .

Observons aussi que pour une matrice polynomiale précisément connue ($N = 1$), on n'a besoin de vérifier que la condition (3.16), avec P_1 et Q_1 . La condition (3.18) n'a besoin d'être considérée que pour $N \geq 3$.

Il est possible de retrouver les conditions de \mathcal{D} -stabilité quadratique du Lemme 3.3 à partir du Théorème 3.1, en imposant $Q_j = Q$ et $P_j = P = P'$, $j = 1, \dots, N$ dans les conditions (3.16)-(3.18). De plus, la condition de \mathcal{D} -stabilité robuste proposée dans [HAPŠ01] peut être reprise à partir des conditions du Théorème 3.1 (équation (3.16)), tout simplement en faisant $Q_j = Q$, $j = 1, \dots, N$ et en utilisant la propriété d'homogénéité des LMIs. Dans ce cas, les conditions (3.17)-(3.18) sont toujours vérifiées.

Les conditions des Théorèmes 1 (cas à temps continu) et 2 (cas à temps discret) de [dOP02] peuvent être reprises à partir du Théorème 3.1. Pour cela, il suffit de considérer les régions \mathcal{R}_C (demi-plan complexe gauche de \mathbb{R}^2) et \mathcal{R}_D (disque unitaire à la origine du plan complexe) définies en (2.5). Pour retrouver les conditions du Théorème 1 de [dOP02] il suffit d'imposer \mathcal{R}_C dans les équations du Théorème 3.1, choisir $Q_j = Q$, $j = 1, \dots, N$ dans (3.16)-(3.17), multiplier (3.16) par \mathcal{N}'_{A_j} à gauche et par son conjugué transposé à droite, et multiplier (3.17) par $\mathcal{N}'_{2A_j+A_k}$ à gauche et par son conjugué transposé à droite. De cette façon, l'inégalité (3.18) est toujours vérifiée.

Similairement, la condition de stabilité pour les systèmes à temps discret et matrices polynomiales incertaines proposée dans le Théorème 2 de [dOP02] peut être retrouvée à partir des conditions du Théorème 3.1. Pour cela, il suffit de poser $Q_j = Q$, $j = 1, \dots, N$ dans (3.16)-(3.18) et de multiplier ces équations à droite et à gauche par des combinaisons adéquates de \mathcal{N}'_{A_j} et \mathcal{N}_{A_j} , respectivement.

Donc, le Théorème 3.1 contient les résultats de [HAPŠ01] (qui utilisent une matrice dépendante de paramètres $Q(\alpha)$ au lieu d'utiliser une matrice fixe, Q) et de [dOP02] (quand on considère $Q(\alpha)$ et généralise la région du plan complexe qui va être testée).

Dans ce chapitre sont étudiés des régions de \mathcal{D} -stabilité largement employées dans le cadre de systèmes à temps continu et à temps discret : le demi-plan et le disque unitaire centré sur l'origine du plan complexe. D'autres régions de premier ordre sont aussi de grand intérêt et peuvent, bien sûr, être investiguées. Par

exemple, la \mathcal{D} -stabilité robuste de polytope de matrices polynomiales par rapport à l'intérieur du disque de rayon r centré sur $(-\sigma, 0)$ — c'est-à-dire, qu'il est déplacé en $\sigma - r$ à gauche de l'axe imaginaire — illustré dans la Figure 3.1. Cette portion du plan complexe — utilisée dans [HB92], [LMP04], [LMPJ02], [LP02], [LP05] — pourrait être considérée avec les conditions du Théorème 3.1, en remplaçant \mathcal{R} par

$$\tilde{\mathcal{R}}_D = \begin{bmatrix} 2\sigma^2 - r^2 & -\sigma \\ -\sigma & 1 \end{bmatrix}$$

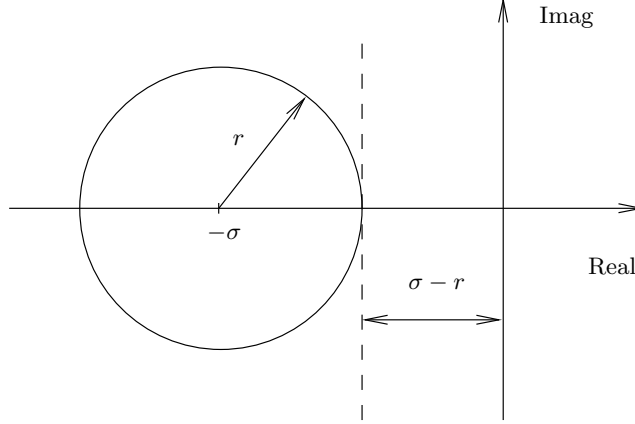


FIG. 3.1 – Région du plan complexe décrite par $\tilde{\mathcal{R}}_D$.

Notons que, si les pôles d'un système à temps continu sont confinés dans la région présentée dans la Figure 3.1, on garantit que toute la dynamique du système peut être limitée par des exponentielles avec coefficients dans l'intervalle $-\sigma \pm r$ et des fréquences (partie imaginaire des pôles) plus petites ou égales à r . En particulier, pour les systèmes du second ordre, cette région du plan complexe garantit un facteur d'amortissement (dans le pire cas) donné par le $\cos(\cdot)$ d'angle déterminé par la droite tangente au disque et qui passe par l'origine, et de fréquence naturelle amortie limitée par le rayon du disque.

Comme observé dans le Chapitre 2 relativement aux conditions LMI du Théorème 2.1, le Théorème 3.1 a été obtenu en utilisant une expression en α_j de degré trois. Un résultat similaire, cependant plus conservatif, peut être obtenu en utilisant une expression en α_j de degré deux, comme cela est présenté dans le Théorème suivant.

Théorème 3.2 *Le polytope de matrices polynomiales \mathbb{A} est robustement \mathcal{D} -stable s'il existe des matrices positives définies $P_j \in \mathbb{R}^{gn \times gn}$ et des matrices $Q_j \in \mathbb{R}^{2gn \times n}$, $j = 1, \dots, N$, solutions de (3.16) et*

$$\tilde{M}_{jk} \triangleq \mathcal{T}'[\mathcal{R} \otimes (P_j + P_k)]\mathcal{T} + (A'_j Q'_k + A'_k Q'_j)\mathcal{T} + \mathcal{T}'(Q_k A_j + Q_j A_k) < \frac{2}{N-1}(\mathbf{I}_{g+1} \otimes \mathbf{I}_n);$$

$$j = 1, \dots, N-1, k = j+1, \dots, N \quad (3.21)$$

où \mathcal{N}_{A_j} et \mathcal{T} sont données respectivement en (3.9) et (3.11). $P(\alpha)$ et $Q(\alpha)$, sont alors données respectivement par (3.19) et (3.20), et satisfont les conditions du Lemme 3.2.

Les conditions du Théorème 3.2 contiennent les conditions LMI du Lemme 3.3, les conditions proposées dans [HAPŠ01] et le Théorème 1 de [dOP02]. Cependant, le Théorème 2 proposé dans [dOP02] (cas à temps discret) n'est pas contenu dans le Théorème 3.2 à cause de la différence de degré en α_j . Toutefois, les conditions du Théorème 3.2 ne sont que suffisantes par rapport à celles du Théorème 3.1.

3.3.1 Polynômes matriciels de premier ordre

Un cas d'intérêt particulier pour l'analyse de \mathcal{D} -stabilité robuste est quand le degré du polynôme matriciel est $g = 1$. Dans ce cas, l'étude de \mathcal{D} -stabilité robuste du polynôme matriciel est équivalente à l'étude de la \mathcal{D} -stabilité de systèmes dynamique linéaires du type $\delta[x(t)] = A(\alpha)x(t)$. Considérez le polynôme matriciel de premier ordre donné par

$$A(s, \alpha) = -A(\alpha) + s\mathbf{I}_n \quad (3.22)$$

Dans ce cas, les conditions proposées dans ce chapitre permettent de retrouver celles proposées dans le Chapitre 2, pour les régions de premier ordre ($d = 1$).

De cette façon, pour le polynôme matriciel à degré $g = 1$ donné par (3.22) avec $A(\alpha) \in \mathcal{A}$, voir (2.2), les régions de stabilité concernant le cas à temps continu et à temps discret décrites par les matrices \mathcal{R}_C et \mathcal{R}_D , données dans (2.5), peuvent être retrouvées. En utilisant la formulation employée dans le Théorème 3.1 avec $g = 1$ et en supposant

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} -A_j & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}_j = \begin{bmatrix} -F_j \\ -G_j \end{bmatrix}; \quad j = 1, \dots, N$$

on obtient que les conditions (3.16)-(3.18) peuvent être réécrites comme dans (2.15)-(2.17) pour $\mathcal{R} = \mathcal{R}_C$ et comme dans (2.18)-(2.20) pour $\mathcal{R} = \mathcal{R}_D$, en changeant, dans les deux cas, les matrices du côté droit des inégalités par \mathbf{I}_n , sans affecter le résultat final grâce à la propriété d'homogénéité.

3.3.2 Complexité numérique

En termes de complexité, des méthodes de résolution basées sur des points intérieurs ont besoin d'un nombre d'opérations en point flottant de l'ordre de $\mathcal{K}^3\mathcal{L}$, où \mathcal{K} est le nombre de variables scalaires du problème d'optimisation et \mathcal{L} est le nombre de lignes des LMIs [BEFB94], [GNLC95].

Le Tableau 3.1 montre les valeurs de \mathcal{K} et \mathcal{L} pour les Théorèmes 3.1 (TE₁) et 3.2 (TE₂), Lemme 3.3 (DQ), Théorème 1 proposé en [HAPŠ01] (T1_{HAPS}) et pour les Théorèmes 1 (T1_{dOOP}) et 2 (T2_{dOOP}) proposés en [dOP02]. Dans ce tableau, n est le nombre d'états du polynôme matriciel, N est le nombre de sommets du polytope \mathbb{A} et g le degré du polynôme. Comme cela est pertinent, les expressions pour \mathcal{K} et \mathcal{L} sont spécialisées pour le demi-plan gauche où pour le disque unitaire centré sur l'origine (respectivement pour les cas à temps continu et à temps discret) sont aussi montrée.

Bien que le nombre de variables scalaires englobé dans T1_{dOOP} soit plus petit que dans T1_{HAPS}, le nombre de LMIs augmente avec N^2 et ce facteur devient dominant pour N grand, ($N > 20$). Notons que, dans le cas à temps discret, la complexité est augmentée par rapport au résultat de T1_{dOOP}, puisque, bien que le nombre de variables scalaires soit le même, le nombre de LMIs a augmenté. Finalement, dans le cas de matrices polynomiales de la forme $A_j(s) = -(A_j - s\mathbf{I}_n)$, les conditions du Théorème 3.1 se réduisent au résultat de la stabilité robuste de systèmes à temps discret, trouvé dans [RP01a], en suivant un développement identique à celui pris pour le cas à temps continu (voir les commentaires après le Théorème 3.1).

L'utilisation de matrices $P(\alpha)$ dépendantes de paramètres données par (3.19) a permis l'obtention de conditions suffisantes pour la stabilité robuste du polytope de matrices polynomiales \mathbb{A} . Le nombre

Critère		\mathcal{K} (n. de variables)	\mathcal{L} (n. de lignes)
TE ₁	Région \mathcal{D}	$\frac{Nng}{2} ((4+g)n+1)$	$\frac{Nn}{6} (N^2 + 3N + 2 + g(N^2 + 3N + 8))$
	\mathcal{R}_C ou \mathcal{R}_D	$\frac{Nn}{2} (5n+1)$	$\frac{Nn}{3} (N^2 + 3N + 5)$
TE ₂	Région \mathcal{D}	$\frac{Nng}{2} ((4+g)n+1)$	$\frac{Nn}{2} (g(N+3) + N+1)$
	\mathcal{R}_C ou \mathcal{R}_D	$\frac{Nn}{2} (5n+1)$	$Nn(N+2)$
DQ	Région \mathcal{D}	$\frac{gn}{2} (gn+1)$	$gn(N+1)$
	\mathcal{R}_C ou \mathcal{R}_D	$\frac{n}{2} (n+1)$	$n(N+1)$
T1 _{HAPS}	Région \mathcal{D}	$\frac{n}{2} (1 + (1+4d^2)n)$	$(2dN+1)n$
	\mathcal{R}_C ou \mathcal{R}_D	$\frac{n}{2} (5n+1)$	$(2N+1)n$
T2 _{dOOP}	\mathcal{R}_D	$\frac{Nn}{2} (n+1)$	$\frac{Nn}{6} (N^2 + 3N + 8)$
T1 _{dOOP}	\mathcal{R}_C	$\frac{Nn}{2} (n+1)$	$\frac{Nn}{2} (N+3)$

TAB. 3.1 – Le nombre de variables scalaires (\mathcal{K}) et le nombre de lignes LMI (\mathcal{L}) en fonction du nombre d'états (n), sommets (N) et degré du polynôme matriciel (g), pour les conditions proposées dans les Théorèmes 3.1 (TE₁) et 3.2 (TE₂), dans le Lemme 3.3 (DQ), dans le Théorème 1 de [HAPŠ01] (T1_{HAPS}) et dans les Théorèmes 1 (T1_{dOOP}) (demi-plan gauche du plan complexe) et 2 (T2_{dOOP}) (disque unitaire centré sur l'origine du plan complexe) proposés dans [dOP02].

de LMIs du Théorème 3.1 est le même que pour T2_{dOOP}, mais pour le premier le nombre de variables scalaires est plus grand que pour le dernier.

Des tests ont été réalisés avec un ordinateur muni d'un processeur Pentium IV 2.6 GHz avec 512 Mbytes de mémoire RAM en utilisant le logiciel *Matlab* et sa boîte à outil *LMI Control Toolbox* [GNLC95]. Le temps moyen en processeur utilisé par les conditions du Théorème 3.1 reste, typiquement, entre 1s (pour les cas à $n = 2$, $N = 2$ et $g = 2$) et 3000s (pour les cas à $n = 4$, $N = 5$ et $g = 4$) pour les systèmes à temps discret aussi bien que pour les systèmes à temps continu.

Remarque 3.1 Les conditions formulées dans ce chapitre supposent que le polytope \mathbb{A} est défini par des matrices réelles. Cependant, si les matrices en \mathbb{A} sont complexes, c'est-à-dire $A_j \in \mathbb{C}^{n \times (g+1)n}$, alors les conditions proposées ici peuvent être utilisées à condition que la recherche de matrices $P(\alpha)$ et $Q(\alpha)$ soit aussi faite dans le domaine des nombres complexes. Dans ce cas, on a $P_j = P_j^* \in \mathbb{C}^{gn \times gn}$, $j = 1, \dots, N$, matrices hermitiennes définies positives, $Q_j \in \mathbb{C}^{2gn \times n}$, $j = 1, \dots, N$ et la région \mathcal{R} appartient au plan complexe.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, des conditions suffisantes pour l'analyse de \mathcal{D} -stabilité de polytope de matrices polynomiales moins conservatives que celles existantes dans la littérature sont étudiées. Ces conditions, de dimension finie en α , sont suffisantes pour la vérification d'une condition plus générale mais de dimension infinie en α . La \mathcal{D} -stabilité robuste du polytope est vérifiée par un test de faisabilité de LMIs qui ne sont décrites qu'aux sommets du polytope. Ce type de test peut être fait avec des méthodes numériques à complexité polynomiale. Le cas de \mathcal{D} -stabilité robuste présenté au Chapitre 2 a été repris à partir des conditions du Théorème 3.1 comme un cas particulier, c'est-à-dire pour le cas des polynômes matriciels incertains de premier ordre.

Deuxième partie

Des systèmes à retard sur les états

La stabilité robuste des systèmes à temps continu ou discret et à retard dans les états est l'objet d'étude de cette seconde partie du travail. Dans les deux cas sont utilisées des fonctions de Lyapunov-Krasovskii dépendantes de paramètres, ce qui mène à des résultats moins conservatifs par rapport à ceux trouvés normalement dans la littérature (généralement basés sur la stabilité quadratique, c'est-à-dire, des matrices de Lyapunov-Krasovskii indépendantes du paramètre de l'incertitude). Dans le Chapitre 4 on étudie les systèmes linéaires incertains neutres, pour lesquels des conditions LMI pour l'analyse de stabilité robuste sont données. On admet des incertitudes dans toutes les matrices du système neutre et, de plus, on admet que les retards, variables dans le temps, sont différents dans l'état et dans sa dérivée temporelle. Les conditions obtenues sont du type "indépendant du retard". La stabilité robuste des systèmes incertains à temps discret et à retard dans les états est étudiée dans le Chapitre 5. Grâce aux propriétés de la formulation obtenue, déjà connues et exploitées dans la littérature dans le contexte des systèmes discrets sans retard, de nouvelles conditions pour la stabilisation robuste sont aussi présentées. Des extensions pour le problème du coût garanti \mathcal{H}_∞ aussi bien que pour la synthèse des contrôleurs à la performance garantie \mathcal{H}_∞ sont présentées sous la forme des problèmes convexes. Les conditions étudiées sont, comme au Chapitre 4, du type "indépendant du retard".

Chapitre 4

Stabilité robuste de systèmes neutres avec retards variants dans le temps

On donne des conditions suffisantes sous la forme de LMIs pour l'analyse de stabilité de systèmes incertains du type neutre, où le vecteur d'état possède des retards variants dans le temps. Toutes les matrices du système sont supposées invariantes dans le temps, incertaines, néanmoins appartenant à un polytope dont les sommets sont connus. La stabilité robuste du système incertain neutre est assurée en utilisant une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii dépendant de paramètres. On montre comment des conditions pour la stabilité robuste de systèmes incertains à temps continu avec et sans retard dans les états peuvent être retrouvées à partir des conditions proposées dans ce chapitre.

4.1 Introduction

Le principal but de ce chapitre est d'obtenir des conditions convexes de type LMI pour l'étude de la stabilité robuste de systèmes incertains du type neutre, c'est-à-dire pour la classe des systèmes dont la dynamique dépend de la dérivée des états passés. Cette classe de systèmes est décrite par des équations différentielles hyperboliques [Hal77] dont la formalisation contient les équations différentielles ordinaires normalement utilisées dans le contexte de la théorie du contrôle. Des lignes de transmission [BGR99], des modèles de circuits équivalents aux éléments partiels (PEEC, de l'anglais *Partial Element Equivalent Circuit*) [CRZ00], [YH04], utilisés dans la modélisation de systèmes électroniques complexes, des circuits opérant en haute fréquence, des problèmes de propagation de flux électromagnétiques tridimensionnelles en circuits, et des processus dynamiques tels que des tubulaires à vapeur ou à fluide, sont autant d'exemples de systèmes physiques qui peuvent être modélisés par des équations différentielles hyperboliques avec des conditions initiales adéquates et dérivées comme des conditions de contour. Dans [Hal77], [Nic01], [CRZ00], et [BGR99] on peut trouver des détails sur ces systèmes neutres.

Parmi plusieurs travaux traitant de cette classe de systèmes, on peut citer [Nic01], où sont formulées autant des conditions dépendantes du retard que des conditions indépendantes du retard pour des systèmes connus et invariants dans le temps. Dans [BRT03], on donne aussi des conditions dépendantes du retard pour ce même type de système (connu et invariant dans le temps). Dans [Ver99], à travers de conditions indépendantes du retard, formulées en termes d'équations algébriques de Ricatti, on s'occupe de systèmes variant dans le temps avec et sans retard. Dans [XLYV03], on considère des incertitudes du type bornée

en norme pour les systèmes invariants dans le temps et à retard fixe. Dans [Bli02], sont proposées des conditions suffisantes indépendantes du retard, qui tendent à être nécessaires à mesure que la complexité des inégalités matricielles augmente. Dans le système neutre

$$\dot{x}(t) - E\dot{x}(t - \tau) = A(\alpha)x(t) + A_h(\alpha)x(t - h)$$

étudié dans [Bli02], on suppose que la matrice E est précisément connue, les retards τ et h sont invariants dans le temps et des matrices dynamiques $A(\alpha)$ et $A_h(\alpha)$ appartiennent à un polytope aux sommets connus. Dans [Fri01] une approche qui utilise la théorie de systèmes descripteurs est considérée. Dans ce travail, aucun type d'incertitudes dans le système, qui est considéré invariant dans le temps, n'est admis. D'autres résultats importants incluent [Par03], [CH04], [Che03], [PKW04], [Che04], [Fu04], [PW00], [Par01], [Han02], [Han04], [IND⁺03]. Néanmoins, la majeure partie de ces travaux ne considère que des retards invariants dans le temps, et généralement suppose que le même retard affecte l'état et sa dérivée, c'est-à-dire, $h = \tau$. De plus, généralement, la stabilité quadratique est la base des résultats. Ces hypothèses restrictives sont éliminées dans les résultats présentés dans ce chapitre. Dans le contexte des systèmes à retard ($E = \mathbf{0}$), il est important de citer [ZKT01] où est démontrée, par l'utilisation du lemme du petit gain avec matrices d'échelonnement constantes, l'équivalence de plusieurs conditions formulées par des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii et l'analyse de stabilité robuste d'un système de comparaison sans retard. Néanmoins, il n'y a pas d'incertitudes dans le système original et le retard est supposé constant. Dans [KR03], la stabilité de systèmes linéaires avec matrices connues et retards variants dans le temps est abordée. Une formulation basée sur les contraintes intégrales quadratiques (IQCs, de l'anglais *integral quadratic constraints*) est aussi présentée. Remarquons encore que, comme cela est montré dans [KR03], dans le contexte de systèmes à retard ($E = \mathbf{0}$), quand le retard est variant dans le temps, l'obtention de conditions pour l'analyse de stabilité devient plus élaborée.

On utilise fréquemment l'approche de la stabilité quadratique [Bar85] pour traiter la présence d'incertitudes, alors que cette approche peut présenter un haut degré de conservatisme. En particulier, la première partie de ce travail (chapitres 2 et 3), illustre bien comment des conditions basées sur la stabilité quadratique peuvent être conservatives. Ainsi, des conditions moins conservatives peuvent être obtenues par l'utilisation de fonctions de Lyapunov dépendantes de paramètres dans le contexte de la stabilité robuste de systèmes linéaires incertains [dOBG99], [LP03a], [PABB00], [RP01a], [RP02].

Dans ce chapitre, on utilise des fonctionnelles dépendantes de paramètres pour l'étude de l'analyse de stabilité robuste de systèmes neutres incertains à retards variants dans le temps. Contrairement à la plus grande partie des travaux sur ce sujet, on considère des valeurs distinctes de retard, dans les états et dans leurs dérivées. De plus, on n'utilise aucune transformation de modèle, qui normalement introduit de nouvelles dynamiques, comme cela est examiné dans [GN01]. Par ailleurs, toutes les matrices du système peuvent être affectées par des incertitudes du type polytopique aux sommets connus. On propose des conditions suffisantes de type LMIs pour l'existence d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii dépendante de paramètres, en assurant la stabilité robuste du système neutre incertain, de manière indépendante des valeurs des retards variant dans le temps. Bien que présentées pour le cas des retards simples, les conditions peuvent être facilement généralisées pour le cas des retards multiples.

4.2 Préliminaires

Considérons la classe suivante de systèmes incertains neutres

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta(x_\tau) = A(\alpha)x(t) + A_h(\alpha)x(t - h(t)) \quad (4.1)$$

$$\Delta(x_\tau) \triangleq x(t) - E(\alpha)x(t - \tau(t)) \quad (4.2)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $h(t) \in \mathbb{R}_+$ et $\tau(t) \in \mathbb{R}_+$ sont des retards variant dans le temps. Les matrices invariantes dans le temps $E(\alpha)$, $A(\alpha)$ et $A_h(\alpha)$ ne sont pas précisément connues, mais appartiennent à un domaine polytopique \mathcal{P} aux sommets connus E_j , A_j , A_{hj} — où $(E, A, A_h)_j$ — donné par

$$\mathcal{P} = \left\{ (E, A, A_h)(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times 3n} : (E, A, A_h)(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j (E, A, A_h)_j ; \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 ; \alpha_j \geq 0 \right\} \quad (4.3)$$

Donc, n'importe quel triple $(E, A, A_h)(\alpha)$ dans \mathcal{P} peut être écrit comme une combinaison convexe des sommets $(E, A, A_h)_j$ du polytope des incertitudes, en termes de α , $\alpha_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$.

Les conditions initiales qui assure l'existence et l'unicité des solutions pour (4.1)-(4.2) joignent

$$x(t_0 + \xi) = \phi(\xi), \forall \xi \in [-\varsigma, 0], (t_0, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_\varsigma^v \quad (4.4)$$

$$\varsigma \triangleq \max\{h(t), \tau(t)\}, h(t) \geq 0, \tau(t) \geq 0, \forall t, \quad (4.5)$$

et la stabilité Schur-Cohn de l'opérateur $\Delta(\cdot)$ défini dans (4.2). Dans le cas où $\tau(t)$ est invariant dans le temps, c'est-à-dire, $\tau(t) = \tau$, donc $\Delta(\cdot)$ est Schur-Cohn stable si

$$\rho(E(\alpha)) < 1, \quad \forall \alpha \text{ admissible.} \quad (4.6)$$

Toutefois, il est important de noter que les conditions qui assurent la stabilité Schur-Cohn de l'opérateur $\Delta(\cdot)$, lorsque le retard varie (c'est-à-dire $\tau(t)$ dépend effectivement du temps), ne sont pas précisément établies dans la littérature. Une discussion intéressante concernant les équations différentielles avec des retards variants dans le temps et leurs conditions initiales peut être consultée dans [El'66]. Dans ce chapitre, afin de donner des conditions permettant d'étudier la stabilité du système (4.1)-(4.3), nous allons faire l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.1 *L'opérateur (4.2) est supposé Schur-Cohn stable pour toute incertitude admissible¹.*

Dans le cas où $\tau(t) = \tau$, l'hypothèse 4.1 correspond à la condition (4.6). Dans la suite, il sera montré comment ce cas-là peut être obtenu à partir de nos conditions.

Dans ce travail, on adopte les définitions suivantes :

Définition 4.1 *On appelle système linéaire incertain neutre tout système qui peut être modélisé par (4.1), avec $E(\alpha) \neq \mathbf{0}$ pour tout α admissible.*

¹Nous faisons cette hypothèse sachant qu'à l'heure actuelle il n'existe pas de méthode constructive permettant de la valider.

Définition 4.2 On appelle système linéaire incertain à retard tout système qui peut être modélisé par (4.1), avec $E = \mathbf{0}$ pour tout α admissible et $A_h \neq \mathbf{0}$ pour certains α .

Dans ce chapitre, on aborde le problème suivant :

Problème 4.1 Déterminer, si possible, des conditions qui assurent la stabilité robuste pour le système linéaire incertain neutre (4.1)-(4.3) de manière indépendante des valeurs des retards variants dans le temps $h(t)$ et $\tau(t)$.

4.3 Stabilité robuste indépendante du retard

D'abord, on présente une LMI de dimension infinie en α comme solution du Problème 4.1. A partir de cette condition, on en propose une autre, suffisante pour que la première soit vérifiée, et cette fois définie en un nombre fini de LMIs. Pour cela, on choisit certaines variables matricielles indépendantes du paramètre α .

On utilise le lemme suivant, basé de la théorie de stabilité de Lyapunov, pour l'obtention des résultats de ce chapitre.

Lemme 4.1 Le système linéaire incertain neutre (4.1)-(4.3) est robustement stable indépendamment des valeurs des retards variants dans le temps $h(t)$ et $\tau(t)$ s'il existe des matrices symétriques définies positives $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $S_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que

$$V(\alpha, x(t), h(t), \tau(t)) = V_1(\alpha, \Delta(x_\tau)) + V_2(\alpha, x(t), h(t)) + V_3(\alpha, x(t), \tau(t)) > 0 \quad (4.7)$$

avec

$$V_1(\alpha, \Delta(x_\tau)) \triangleq \Delta(x_\tau)' P(\alpha) \Delta(x_\tau) \quad (4.8)$$

$$V_2(\alpha, x(t), h(t)) \triangleq \int_{t-h(t)}^t x(\sigma)' S_1(\alpha) x(\sigma) d\sigma \quad (4.9)$$

$$V_3(\alpha, x(t), \tau(t)) \triangleq \int_{t-\tau(t)}^t x(\varepsilon)' S_2(\alpha) x(\varepsilon) d\varepsilon \quad (4.10)$$

pour tout $\chi(t) \neq \mathbf{0}$,

$$\chi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h(t)) \\ x(t-\tau(t)) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} V(\alpha, x(t), h(t), \tau(t)) < 0 \quad (4.12)$$

Une observation important à propos du Lemme 4.1 est que ce lemme ne propose pas de méthode pour l'obtention des matrices $P(\alpha)$, $S_1(\alpha)$ et $S_2(\alpha)$. Remarquons encore que l'équation (4.12) est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} V(\alpha, x(t), h(t), \tau(t)) &= \dot{\Delta}(x_\tau)' P(\alpha) \Delta(x_\tau) + \Delta(x_\tau)' P(\alpha) \dot{\Delta}(x_\tau) \\ &\quad - (1 - \dot{h}(t)) x(t-h(t))' S_1(\alpha) x(t-h(t)) - (1 - \dot{\tau}(t)) x(t-\tau(t))' S_2(\alpha) x(t-\tau(t)) \\ &\quad + x(t)' (S_1(\alpha) + S_2(\alpha)) x(t) < 0 \end{aligned}$$

où on n'impose aucun majorant sur les taux de variation des retards. Dorénavant, les limites suivantes sont assumées pour les taux de variation des retards, pour obtenir des conditions suffisantes pour la vérification du Lemme 4.1 et, donc, une solution pour le Problème 4.1. Ainsi, supposons que

$$|\dot{h}(t)| \leq \bar{h} < 1 \quad (4.13)$$

$$|\dot{\tau}(t)| \leq \bar{\tau} < 1 \quad (4.14)$$

et définissons les scalaires

$$\beta_{\bar{h}} \triangleq (1 - \bar{h}) \quad ; \quad \beta_{\bar{\tau}} \triangleq (1 - \bar{\tau}) \quad (4.15)$$

Avec ces définitions il est possible d'établir les principaux résultats de ce chapitre. La condition suivante est convexe dans les variables d'optimisation et de dimension infinie en α .

Théorème 4.1 *Les conditions équivalentes suivantes assurent la stabilité robuste indépendamment des retards variants dans le temps du système linéaire incertain neutre (4.1)-(4.3), soumis à (4.13)-(4.14), et sont suffisantes pour la vérification du Lemme 4.1, en assurant donc une solution pour le Problème 4.1 :*

i) *Il existe des matrices symétriques définies positives $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $S_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que*

$$\Theta(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) + S_1(\alpha) + S_2(\alpha) & P(\alpha)A_h(\alpha) & -A(\alpha)'P(\alpha)E(\alpha) \\ \star & -\beta_{\bar{h}}S_1(\alpha) & -A_h(\alpha)'P(\alpha)E(\alpha) \\ \star & \star & -\beta_{\bar{\tau}}S_2(\alpha) \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (4.16)$$

ii) *Il existe des matrices symétriques définies positives $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et des matrices $F_1(\alpha)$, $F_2(\alpha)$, $G_1(\alpha)$, $G_2(\alpha)$, $H_1(\alpha)$, $H_2(\alpha)$, $M_1(\alpha)$, $M_2(\alpha)$, $N_1(\alpha)$ et $N_2(\alpha)$ appartenant à $\mathbb{R}^{n \times n}$ telles que*

$$\Xi(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} F_1(\alpha) + F_1(\alpha)' & P(\alpha) + F_2(\alpha) + G_1(\alpha)' & H_1(\alpha)' - (F_1(\alpha)A(\alpha) + F_2(\alpha)) \\ \star & G_2(\alpha) + G_2(\alpha)' & H_2(\alpha)' - (G_1(\alpha)A(\alpha) + G_2(\alpha)) \\ \star & \star & S_1(\alpha) + S_2(\alpha) - (H_1(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)'H_1(\alpha)' + H_2(\alpha) + H_2(\alpha)') \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ M_1(\alpha)' - F_1(\alpha)A_h(\alpha) & N_1(\alpha)' + F_2(\alpha)E(\alpha) \\ M_2(\alpha)' - G_1(\alpha)A_h(\alpha) & N_2(\alpha)' + G_2(\alpha)E(\alpha) \\ -(H_1(\alpha)A_h(\alpha) + A(\alpha)'M_1(\alpha)' + M_2(\alpha)') & H_2(\alpha)E(\alpha) - (A(\alpha)'N_1(\alpha)' + N_2(\alpha)') \\ -\beta_{\bar{h}}S_1(\alpha) + M_1(\alpha)A_h(\alpha) & M_2(\alpha)E(\alpha) - A_h(\alpha)'N_1(\alpha)' \\ +A_h(\alpha)'M_1(\alpha)' & -\beta_{\bar{\tau}}S_2(\alpha) + N_2(\alpha)E(\alpha) + E(\alpha)'N_2(\alpha)' \\ \star & \star \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (4.17)$$

Les conditions présentées dans le Théorème 4.1 ne dépendent pas des valeurs de $h(t)$ et $\tau(t)$, mais seulement de leurs taux de variation maximal, respectivement $\bar{\tau}$ et \bar{h} . Par ailleurs, le Théorème 4.1 pourrait être utilisé pour vérifier la stabilité robuste d'un système neutre appartenant à n'importe quel domaine d'incertitudes paramétré dans α , en ayant besoin de tester toutes les valeurs possibles de α du domaine correspondant. Un test numériquement efficace, défini par un nombre fini de LMIs, qui assure les conditions

du Lemme 4.1, peut être obtenu en imposant la structure suivante aux matrices symétriques $P(\alpha)$, $S_1(\alpha)$ et $S_2(\alpha)$

$$P(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j P_j; \quad S_1(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j S_{1j}; \quad S_2(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j S_{2j}; \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1, \quad \alpha_j \geq 0 \quad (4.18)$$

et en choisissant les matrices additionnelles d'une manière indépendante du paramètre α , c'est-à-dire $F_1(\alpha) = F_1$, $F_2(\alpha) = F_2$, $G_1(\alpha) = G_1$, $G_2(\alpha) = G_2$, $H_1(\alpha) = H_1$, $H_2(\alpha) = H_2$, $M_1(\alpha) = M_1$, $M_2(\alpha) = M_2$, $N_1(\alpha) = N_1$ et $N_2(\alpha) = N_2$.

Théorème 4.2 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_{1j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_{2j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$ et des matrices $F_1, F_2, G_1, G_2, H_1, H_2, M_1, M_2, N_1$ et N_2 appartenant à $\mathbb{R}^{n \times n}$ telles que*

$$\Xi_j \triangleq \begin{bmatrix} F_1 + F'_1 & P_j + F_2 + G'_1 & H'_1 - (F_1 A_j + F_2) & M'_1 - F_1 A_{hj} & N'_1 + F_2 E_j \\ \star & G_2 + G'_2 & H'_2 - (G_1 A_j + G_2) & M'_2 - G_1 A_{hj} & N'_2 + G_2 E_j \\ \star & \star & S_{1j} + S_{2j} - (H_1 A_j + A'_j H'_1 + H_2 + H'_2) & -(H_1 A_{hj} + A'_j M'_1 + M'_2) & H_2 E_j - (A'_j N'_1 + N'_2) \\ \star & \star & \star & -\beta_h S_{1j} + M_1 A_{hj} + A'_{hj} M'_1 & M_2 E_j - A'_{hj} N'_1 \\ \star & \star & \star & \star & -\beta_\tau S_{2j} + N_2 E_j + E'_j N'_2 \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (4.19)$$

alors les conditions du Lemme 4.1 sont vérifiées avec $P(\alpha)$, $S_1(\alpha)$ et $S_2(\alpha)$ données par (4.18), et assurant donc une solution pour le Problème 4.1.

L'obtention d'une condition basée sur la stabilité quadratique et les variables supplémentaires à partir du Théorème 4.2 est immédiate. Ce résultat est présenté dans le corollaire qui suit.

Corollaire 4.1 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, et des matrices $F_1, F_2, G_1, G_2, H_1, H_2, M_1, M_2, N_1$ et N_2 appartenant à $\mathbb{R}^{n \times n}$ telles que*

$$\begin{bmatrix} F_1 + F'_1 & P + F_2 + G'_1 & H'_1 - (F_1 A_j + F_2) & M'_1 - F_1 A_{hj} & N'_1 + F_2 E_j \\ \star & G_2 + G'_2 & H'_2 - (G_1 A_j + G_2) & M'_2 - G_1 A_{hj} & N'_2 + G_2 E_j \\ \star & \star & S_1 + S_2 - (H_1 A_j + A'_j H'_1 + H_2 + H'_2) & -(H_1 A_{hj} + A'_j M'_1 + M'_2) & H_2 E_j - (A'_j N'_1 + N'_2) \\ \star & \star & \star & -\beta_h S_1 + M_1 A_{hj} + A'_{hj} M'_1 & M_2 E_j - A'_{hj} N'_1 \\ \star & \star & \star & \star & -\beta_\tau S_2 + N_2 E_j + E'_j N'_2 \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (4.20)$$

alors les conditions du Lemme 4.1 sont vérifiées avec $P(\alpha) = P$, $S_1(\alpha) = S_1$ et $S_2(\alpha) = S_2$, en assurant une solution pour le Problème 4.1. Dans ce cas, le système incertain (4.1)-(4.3) est dit "quadratiquement stable".

Remarquons que la condition *i)* du Théorème 4.1 ne peut pas être transformée directement en une condition de dimension finie en α , comme cela peut être fait avec la condition *ii)* de ce théorème. L'obstacle principal, dans ce cas, est l'occurrence du produit triple dans les blocs (1, 3) et (2, 3) (et leurs symétriques) de (4.16). En raison de cela, plusieurs conditions convexes trouvées dans la littérature exigent que la matrice $E(\alpha)$ soit précisément connue, c'est-à-dire, $E(\alpha) = E, \forall \alpha$ (voir, par exemple, [Bli02]). Dans le cas où $E(\alpha) = E$, on peut obtenir une condition de stabilité quadratique pour le système neutre avec des matrices $A(\alpha)$ et $A_h(\alpha)$ incertaines et des retards $h(t)$ et $\tau(t)$ variants dans le temps et soumis à (4.13)-(4.14), comme cela est présenté dans le corollaire suivant.

Corollaire 4.2 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $S_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que*

$$\begin{bmatrix} A_j'P + PA_j + S_1 + S_2 & PA_{hj} & -A_j'PE \\ \star & -\beta_{\bar{h}}S_1 & -A_{hj}PE \\ \star & \star & -\beta_{\bar{\tau}}S_2 \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (4.21)$$

alors les conditions du Lemme 4.1 sont vérifiées avec $P(\alpha) = P$, $S_1(\alpha) = S_1$ et $S_2(\alpha) = S_2$, en assurant que le système (4.1)-(4.3), avec $E_j = E$, $j = 1, \dots, N$ et des retards soumis à (4.13) et (4.14), est quadratiquement stable.

Le produit de matrices qui sont fonctions du paramètre α peut être traité en utilisant la technique présentée dans les Chapitres 2 et 3. Voir [PTGL03] pour l'application de cette technique dans le contexte de systèmes incertains à temps continu et à retards dans les états ($E = \mathbf{0}$) et avec $\beta_{\bar{h}} = 1$ (retard invariant dans le temps) dans (4.16).

4.4 Cas particuliers

Quelques cas dégénérés de l'équation différentielle hyperbolique donnée en (4.1) sont d'intérêt théorique et pratique. Ces cas peuvent être résumés par les situations suivantes :

1. Matrice $A_h(\alpha) = \mathbf{0}, \forall \alpha$, impliquant que le système (4.1) est décrit par

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta(x_\tau) = A(\alpha)x(t) \quad (4.22)$$

2. Matrice $E(\alpha) = \mathbf{0}, \forall \alpha$, ce qui fait que le système (4.1) n'est plus du type neutre et correspond à un système incertain à retard dans les états donné par

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + A_h(\alpha)x(t - h(t)) \quad (4.23)$$

Dans ce cas, l'opérateur $\Delta(\cdot)$ dans (4.2) est simplement $\Delta(x_\tau) = x(t)$, puisque, sans perte de généralité, on suppose $\tau(t) = 0, \forall t$.

3. Les matrices $E(\alpha)$ et $A_h(\alpha)$ sont toutes les deux des matrices nulles, $\forall \alpha$, correspondant au cas classique d'un système linéaire incertain dans le temps et sans retards donné par

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) \quad (4.24)$$

Dans ces trois situations, des conditions de plus petite complexité, par rapport à celles présentées dans ce chapitre, peuvent être obtenues à partir des conditions présentées dans les théorèmes 4.1 et 4.2 pour l'analyse de stabilité robuste de (4.22)-(4.24). Ce fait découle de simplifications dans la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii communément employée dans chacune de ces situations. Il faut rappeler qu'en (4.22)-(4.24) les matrices dynamiques appartiennent au polytope \mathcal{P} donné en (4.3).

Remarquons que pour le cas où $A_h(\alpha) = \mathbf{0}$, la fonctionnelle (4.7)-(4.10) peut être simplifiée en imposant $S_1(\alpha) = \mathbf{0}$:

$$V(\alpha, x(t), h(t), \tau(t)) = V(\alpha, x(t), \tau(t)) = V_1(\alpha, \Delta(x_\tau)) + V_3(\alpha, x(t), \tau(t)) > 0 \quad (4.25)$$

et, dans le cas où seulement $E(\alpha) = \mathbf{0}$, on prend $S_2(\alpha) = \mathbf{0}$ en considérant la fonctionnelle (4.7) de la forme

$$V(\alpha, x(t), h(t), \tau(t)) = V_1(\alpha, \Delta(x_\tau)) + V_2(\alpha, x(t), h(t)) > 0 \quad (4.26)$$

soit encore

$$V(\alpha, x(t), h(t), \tau(t)) = V(\alpha, x(t), h(t)) = x(t)'P(\alpha)x(t) + V_2(x(t), h(t)) > 0 \quad (4.27)$$

Dans la troisième situation, où $A_h(\alpha) = \mathbf{0}$ et $E(\alpha) = \mathbf{0}$, $\forall \alpha$, la fonctionnelle examinée reste réduite à la fonctionnelle standard de Lyapunov, et est donné par

$$V(\alpha, x(t), h(t), \tau(t)) = V(\alpha, x(t)) = x(t)'P(\alpha)x(t) > 0 \quad (4.28)$$

Dans ce qui suit, on présente les conditions qui peuvent être obtenues comme des cas particuliers des théorèmes 4.1 et 4.2. Dans ce travail, on se focalise sur l'obtention de conditions convexes de dimension finie en α et pour cela les corollaires présentés ensuite sont déterminés à partir des conditions du Théorème 4.2. On peut faire, bien sûr, un développement analogue à partir du Théorème 4.1, en obtenant dans ce cas, des conditions de dimension infinie en α . Il est important de souligner que, bien que ces conditions puissent être obtenues à partir des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii (4.25)-(4.28), en suivant les démarches semblables à celles présentées dans les preuves des théorèmes 4.1 et 4.2, on a choisi l'obtention de ces conditions via l'application de transformations de congruence données dans (4.19).

4.4.1 Stabilité robuste du système incertain neutre

La situation étudiée ici est le système neutre (4.1) avec $A_h(\alpha) = \mathbf{0}$, $\forall \alpha$. La condition de stabilité robuste indépendante du retard pour ce cas peut être obtenue à partir de (4.19), en posant $S_{1j} = \mathbf{0}$, $j = 1, \dots, N$, et en appliquant la transformation de congruence

$$T_{A_h} \Xi_j T_{A_h}' ; \quad j = 1, \dots, N \quad (4.29)$$

avec Ξ_j donnée dans (4.19) et

$$T_{A_h} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}$$

Ceci nous donne le corollaire suivant.

Corollaire 4.3 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_{2j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$ et des matrices $F_1, F_2, G_1, G_2, H_1, H_2, N_1$ et N_2 appartenant à $\mathbb{R}^{n \times n}$ telles que*

$$\Xi_{A_{hj}} \triangleq \begin{bmatrix} F_1 + F'_1 & P_j + F_2 + G'_1 & H'_1 - (F_1 A_j + F_2) & N'_1 + F_2 E_j \\ \star & G_2 + G'_2 & H'_2 - (G_1 A_j + G_2) & N'_2 + G_2 E_j \\ \star & \star & S_{2j} - (H_1 A_j + A'_j H'_1 + H_2 + H'_2) & H_2 E_j - (A'_j N'_1 + N'_2) \\ \star & \star & \star & -\beta_\tau S_{2j} + N_2 E_j + E'_j N'_2 \end{bmatrix} < \mathbf{0};$$

$$j = 1, \dots, N \quad (4.30)$$

alors $P(\alpha)$ et $S_2(\alpha)$ données en (4.18) assurent (4.25) et (4.12), en garantissant la stabilité robuste de (4.22) avec $\tau(t)$ soumis à (4.14), indépendamment de la valeur du retard $\tau(t)$.

4.4.2 Stabilité robuste du système incertain à retard dans les états

Dans ce cas on considère $E(\alpha) = \mathbf{0}$, $\forall \alpha$, impliquant que la caractéristique “neutre” du système est perdue et le système est décrit comme en (4.1), avec $h(t)$ soumis à (4.13). En posant $S_{2j} = \mathbf{0}$ dans (4.23) et en appliquant la transformation de congruence

$$\Xi_{Ej} = T_E \Xi_j T'_E; \quad j = 1, \dots, N \quad (4.31)$$

avec Ξ_j donnée dans (4.19) et

$$T_E = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

on peut établir le corollaire suivant.

Corollaire 4.4 *S'il existe des matrices positives définies $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $S_{1j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$, des matrices $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que*

$$\Xi_{Ej} \triangleq \begin{bmatrix} F + F' & P_j + G' - F A_j & M' - F A_{hj} \\ \star & S_{1j} - G A_j - A'_j G' & -G A_{hj} - A'_j M' \\ \star & \star & -\beta_h S_{1j} - M A_{hj} - A'_{hj} M' \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (4.32)$$

alors $P(\alpha)$ et $S_1(\alpha)$ données en (4.18) assurent (4.27) et (4.12), en garantissant la stabilité robuste de (4.23) avec $h(t)$ soumis à (4.13), indépendamment de la valeur du retard $h(t)$.

Dans le corollaire 4.4, les variables additionnelles F , G et M sont liées à celles du Théorème 4.2 de la suivante manière :

$$F = F_1; \quad G = G_1 + H_1; \quad \text{et} \quad M = M_1$$

4.4.3 Stabilité robuste du système incertain

Enfin, considérons le système linéaire incertain donné en (4.1) sans retard, c'est-à-dire, avec $E(\alpha) = \mathbf{0}$ et $A_h(\alpha) = \mathbf{0}$, $\forall \alpha$. Le système à temps continu résultant, $\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t)$, est le même que celui étudié dans le Chapitre 2. Dans ce cas, la condition présentée dans [PABB00] pour les systèmes à temps continu (et en considérant la région $\mathcal{R} = \mathcal{R}_C$ donnée dans (2.5)) peut être retrouvée à partir de (4.19) en

imposant $S_1(\alpha) = S_2(\alpha) = \mathbf{0}$ et en considérant, donc, la fonctionnelle donnée dans (4.28). En appliquant la transformation de congruence

$$T_{EA_h} \Xi_j T_{EA_h}' ; \quad j = 1, \dots, N$$

avec Ξ_j , $j = 1, \dots, N$, donnée dans (4.19) et

$$T_{EA_h} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 4.5 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$, des matrices $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que*

$$\Xi_{EA_h j} \triangleq \begin{bmatrix} -(FA_j + A_j'F') & P_j + F - A_j'G \\ \star & G + G' \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (4.33)$$

alors $P(\alpha)$ donnée dans (4.18) assure (4.28) et (4.12), en garantissant la stabilité robuste du système sans retards donné par (4.24).

Dans le cas du Corollaire 4.5 les relations entre les matrices F et G dans (4.33), celles correspondantes dans [PABB00] (F_{PABB} , G_{PABB}) et les matrices additionnelles de (4.19) sont données par

$$G = G_{\text{PABB}} = -(G_1 + H_1); \quad F = F_{\text{PABB}} = -F_1$$

Remarque 4.1 Il est important de souligner que tous les résultats présentés ici contiennent, comme cas particulier, la stabilité quadratique qui utilise des matrices constantes dans les fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii considérées. On peut obtenir ces conditions à partir des résultats présentés ici en imposant $P(\alpha) = P_j = P$, $S_1(\alpha) = S_{1j} = S_1$ et $S_2(\alpha) = S_{2j} = S_2$.

Remarque 4.2 L'extension des résultats présentés dans ce travail pour le cas de plusieurs retards est immédiate.

Remarque 4.3 Il est important de souligner que le cas où les retards sont supposés invariants dans le temps, c'est-à-dire, $\tau(t) = \tau$ et $h(t) = h$, est contenu dans les conditions données dans ce chapitre. Dans ce cas, il suffit de faire $\beta_{\bar{\tau}} = 1$ et $\beta_{\bar{h}} = 1$, respectivement, dans les conditions y présentées.

4.5 Complexité numérique

La complexité numérique associée aux conditions LMIs présentées dans ce chapitre sont données dans le Tableau 4.1. Les LMIs peuvent être résolues en temps polynomial par des algorithmes de complexité numérique proportionnelle à $\mathcal{K}^3 \mathcal{L}$, \mathcal{K} étant le nombre de variables scalaires et \mathcal{L} le nombre de lignes des LMIs, [GNLC95].

Une autre approche, moins conservative, pour l'obtention de conditions convexes de dimension finie suffisantes pour celles établies dans le Théorème 4.1 consiste à utiliser les idées déjà explorées dans les Chapitres 2 et 3, en permettant que les variables additionnelles présentes dans la condition *ii*) de ce théorème soient aussi dépendantes, de manière semblable, du paramètre α . Bien sûr, dans ce cas, les

Critère	\mathcal{K} (n. de variables)	\mathcal{L} (n. de lignes)
Théorème 4.2	$\frac{3Nn}{2}(n+1) + 10n^2$	$8Nn$
Corollaire 4.1	$\frac{3Nn}{2}(n+1) + 10n^2$	$8Nn$
Corollaire 4.2	$\frac{3n}{2}(n+1)$	$3Nn$
Corollaire 4.3	$Nn(n+1) + 8n^2$	$6Nn$
Corollaire 4.4	$Nn(n+1) + 3n^2$	$5Nn$
Corollaire 4.5	$\frac{Nn}{2}(n+1) + 2n^2$	$3Nn$

TAB. 4.1 – Nombre de variables scalaires \mathcal{K} et nombre de lignes \mathcal{L} en fonction du nombre d'état (n) et de sommets (N) pour les conditions d'analyse de stabilité étudiées.

conditions obtenues seront moins conservatives que les conditions du Théorème 4.2, bien que de complexité plus élevée. Comme exemple de ce type d'approche, dans le contexte de systèmes incertains à temps continu et à retards (invariants dans le temps) dans les états, on peut voir [LPT03] pour des conditions indépendantes du retard avec des variables additionnelles et [PTGL03] pour des conditions dépendantes et indépendantes du retard (sans variables additionnelles).

4.6 Conclusion

Nous avons présenté des conditions LMI indépendantes du retard, suffisantes pour l'analyse de stabilité robuste de systèmes linéaires incertains neutres, appartenant aux domaines polytopiques, à retards variants dans le temps. Ces conditions sont basées sur les fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii dépendantes de paramètres, ce que rend les conditions bien moins conservatives que celles basées sur des matrices fixes (stabilité quadratique). On a montré que les conditions d'analyse de stabilité robuste de systèmes neutres contiennent d'autres conditions concernant certains cas dégénérés, comme les systèmes à retard et les systèmes sans retard.

Chapitre 5

La commande robuste \mathcal{H}_∞ de systèmes à temps discret et à retard dans les états

Dans ce chapitre, nous étudions des systèmes incertains à temps discret et à retard dans les états. Les incertitudes sont supposées appartenir à un polytope convexe connu et peuvent affecter toutes les matrices du système. On donne des conditions du type LMI suffisantes pour la stabilité robuste et pour la stabilisation robuste. Ensuite, ces conditions sont étendues au problème du coût garanti \mathcal{H}_∞ et pour la synthèse du gain robuste de retour d'état, en assurant un niveau pre-déterminé d'atténuation \mathcal{H}_∞ , en considérant un terme qui dépend de l'état et, s'il est disponible, aussi un terme qui dépend de l'état retardé. Les conditions proposées ici sont du type "indépendant du retard" au sens où la robustesse est assurée indépendamment de la valeur du retard et, différemment d'autres approches trouvées dans la littérature, sont formulées comme des problèmes d'optimisation convexe. Si le retard est connu et les états retardés sont disponibles, un gain de retour d'état dépendant des valeurs passées des états peut être utilisé pour améliorer la performance du système en boucle fermée. Les conditions proposées sont simples à appliquer et peuvent mener à des résultats moins conservatifs, comparées aux conditions du type "dépendant de retard". Quelques résultats présentés dans ce chapitre peuvent être trouvés dans [LTP04b], [LTP04a] et [LTP].

Dans la littérature, on peut trouver des approches pour traiter les problèmes de stabilité robuste, de stabilisation robuste, de coût garanti \mathcal{H}_∞ et de synthèse de contrôleur avec performance \mathcal{H}_∞ garantie associés à la classe de systèmes linéaires incertains, à temps discret et à retard dans les états. Dans [WH94], une condition indépendante du retard suffisante pour la stabilité exponentielle est présentée pour des systèmes précisément connus. Dans [CC03], sont proposées des conditions algébriques pour la stabilité robuste de systèmes singuliers à temps discret et avec incertitudes paramétriques structurées. Dans [HD03], les auteurs ont considéré le rayon de stabilité réel de systèmes invariants dans le temps avec perturbations limitées en norme et à retard dans les états. Dans [KP90], est présentée une technique du type LQG (de l'anglais Linear Quadratic Gaussian) pour les systèmes à retard précisément connus. En utilisant le concept de stabilité quadratique [Bar85], des conditions suffisantes pour l'analyse de stabilité indépendante du retard de systèmes incertains (à retard), ont été présentées dans plusieurs travaux, quelques uns proposant aussi une extension pour le cas de synthèse de contrôleur. En suivant cette méthodologie, dans [SBSA03], des systèmes avec incertitudes du type bornés en norme et avec des retards invariants dans le temps sont

considérés. Ce travail inclut une fonction de coût quadratique, qui implique des conditions non-convexes pour le cas de synthèse de contrôleur.

Dans [MX00], les auteurs présentent une approche par commande optimale en ne considérant que des retards fixes et avec une formulation basée sur des équations couplées de Ricatti qui dépendent de variables scalaires pour être résolues. Dans [XLY01], on propose une approche utilisant la stabilité quadratique aussi pour les retards invariants dans le temps. Dans ce travail, sont présentées des conditions non-linéaires, nécessaires et suffisantes pour la stabilité et pour la stabilisation quadratique, pour les systèmes à perturbations du type limité en norme, présentes uniquement dans la matrice dynamique. Dans [ZWH04], on propose des conditions convexes pour l'analyse de stabilité de systèmes précisément connus, avec un terme additif du type non-linéaire borné en norme. Dans [Xu02], le problème de synthèse de filtres pour les systèmes à temps discret et à retard dans les états est traité. Pour le cas de perturbations bornées en norme, on peut trouver dans [WHU99] une approche basée sur la stabilité quadratique et LMI pour la synthèse d'observateurs avec performance \mathcal{H}_∞ . Dans [LHLK92], on peut trouver des conditions suffisantes pour l'analyse régionale de pôles. Ces conditions sont formulées en termes de normes matricielles, mais les tests ne peuvent être appliqués qu'à des systèmes précisément connus et avec un retard unitaire. En utilisant l'approche par stabilité quadratique, dans [Mah00], des conditions non-convexes en termes d'équations algébriques de Ricatti sont proposées.

Dans [FS03], un système augmenté du type descripteur est défini et des conditions sont établies pour l'analyse de stabilité basée sur des disparités matricielles avec des multiplicateurs scalaires.

Dans [KH98], une étude sur la commande robuste \mathcal{H}_∞ pour des systèmes précisément connus, à temps discret et à retard dans les états, est décrite à travers des équations de Ricatti. Dans [SK98], les auteurs proposent une approche par disparité matricielle (non-convexe), pour des systèmes à incertitudes du type borné en norme. Les cas à temps continu et à temps discret sont étudiés dans [KP99], dans le contexte de commande par retour d'état avec une performance \mathcal{H}_∞ . Des conditions suffisantes pour la synthèse de gains de retour d'état qui garantissent une performance \mathcal{H}_∞ sont données en termes de LMI avec un paramètre d'échelonnement. Dans ce cas, on n'admet que des perturbations du type borné en norme. Dans [XC04], on propose des disparités matricielles non-convexes, pour résoudre le problème de la commande robuste \mathcal{H}_∞ pour les systèmes à temps discret et à retards dans les états. Dans ce cas, le système est supposé variant dans le temps et l'approche utilise la stabilité quadratique pour la formulation des conditions de synthèse.

Tous ces résultats sont formulés en termes de matrices de Lyapunov fixes et peuvent, dans certains cas, donner des conditions pour la synthèse d'un gain robuste par retour d'état, le plus souvent avec des conditions non-convexes. Des extensions de ces conditions pour traiter le cas à incertitudes du type polytopique ne semblent pas immédiates. En outre, l'approche basée sur la stabilité quadratique (c'est-à-dire l'utilisation d'une matrice de Lyapunov fixe) peut présenter des résultats conservatifs dans l'évaluation des systèmes à incertitudes invariantes dans le temps. Malgré l'existence de résultats récents utilisant des fonctions de Lyapunov dépendantes de paramètres pour étudier la stabilité robuste [dOBG99], [LP03a], [PABB00], [RP01a], [dOGB02], [DB01], [LP04], jusqu'à maintenant il n'y a pas d'extensions de ces résultats pour le cas de systèmes à retard dans les états.

Ce chapitre traite de systèmes linéaires à temps discret et à retard dans les états et dans les équations de sortie. Toutes les matrices des systèmes sont supposés invariantes dans le temps et incertaines, mais appartenant à un domaine polytopique à sommets connus. On étudie le problème de la stabilité robuste

avec des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii. On présente des conditions équivalentes du type LMI, dont certaines utilisent des matrices additionnelles. A partir de ces conditions, on présente une approche convexe pour le cas de synthèse de gain stabilisant robuste. Bien que les LMI soient du type indépendant du retard, ces LMIs peuvent être aussi utilisées pour la synthèse de gain de retour d'état retardé. Quand le retard est connu, cette stratégie peut permettre d'obtenir des gains stabilisants lorsque un retour d'état sans mémoire ne peut pas exister. Comme cela est examiné dans [Ric03], les lois de retour dépendantes d'état retardés peuvent induire des degrés de liberté utiles et intéressants, même pour les systèmes sans retard. On présente des conditions LMIs suffisantes et indépendantes du retard pour la détermination du coût garanti \mathcal{H}_∞ et pour l'obtention d'une commande robuste \mathcal{H}_∞ par retour d'état. Ces conditions permettent aussi de calculer un gain pour la commande robuste \mathcal{H}_∞ dépendante d'états retardés, qui peut être utilisé pour améliorer le niveau d'atténuation \mathcal{H}_∞ du système en boucle fermée, lorsque le retard est connu. De plus, les conditions convexes présentées ici peuvent être étendues pour traiter le cas de synthèse de commande décentralisée, sans imposer de restrictions de structure dans les matrices dépendantes de paramètres de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii utilisée pour assurer la stabilité de la boucle fermée.

Comme toutes les matrices du système peuvent être affectées par des incertitudes polytopiques, l'approche proposée dans ce chapitre permet de traiter aussi les systèmes incertains soumis à des manques partiels ou totaux d'actionneurs. Bien que les incertitudes, de même que les retards, sont invariants dans le temps, quelques résultats présentés comme des corollaires et basés sur les fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii fixes peuvent être appliqués aussi aux systèmes à incertitudes variantes dans le temps et à retards constants.

5.1 Préliminaires et formulation du problème

Considérons le système linéaire incertain à temps discret donné par

$$\Omega(\alpha) : \begin{cases} x(k+1) = A(\alpha)x(k) + A_h(\alpha)x(k-h) + B(\alpha)u(k) + B_h(\alpha)u_h(k) + B_w(\alpha)w(k) \\ z(k) = C(\alpha)x(k) + C_h(\alpha)x(k-h) + D(\alpha)u(k) + D_h(\alpha)u_h(k) + D_w(\alpha)w(k) \\ x(k) = 0, \quad k \leq 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $h \in \mathbb{N}$ est la valeur du retard (supposé constant), $u(k) \in \mathbb{R}^{m_1}$, $u_h(k) \in \mathbb{R}^{m_2}$ représentent les entrées de commande, $w(k) \in \mathbb{R}^\ell$ est le vecteur exogène de perturbation et $z(k) \in \mathbb{R}^p$ est la sortie contrôlée. Remarquons que les deux matrices d'entrée de commande peuvent avoir des dimensions différentes, en permettant une modélisation plus précise des dispositifs distincts de commande. Le retard h n'est pas utilisé dans le développement des conditions d'analyse et synthèse de commande, mais si h est connu, l'entrée de commande $u_h(k)$ dépendante de valeurs passées des états $x(k)$ peut être utilisée pour le retour, même dans le cas $B = B_h$. Bien qu'il ne s'agisse ici que d'un unique retard, l'extension des résultats pour des retards multiples est immédiate. Les matrices $A(\alpha)$, $A_h(\alpha)$, $B(\alpha)$, $B_h(\alpha)$, $B_w(\alpha)$, $C(\alpha)$, $C_h(\alpha)$, $D(\alpha)$, $D_h(\alpha)$, $D_w(\alpha)$, de dimensions adéquates, définissent le système $\Omega(\alpha)$ et sont supposées fixes, mais non précisément connues, c'est-à-dire, $\Omega(\alpha)$ appartient à l'ensemble polytopique \mathbb{A}_h décrit par

$$\mathbb{A}_h \triangleq \left\{ \Omega(\alpha) \in \mathbb{R}^{n+p \times 2n+m_1+m_2+\ell} : \Omega(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Omega_j, \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, N \right\} \quad (5.2)$$

avec des sommets

$$\Omega_j \triangleq \left[\begin{array}{cc|cc|c} A_j & A_{hj} & B_j & B_{hj} & B_{wj} \\ C_j & C_{hj} & D_j & D_{hj} & D_{wj} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N. \quad (5.3)$$

Remarquons que n'importe quel $\Omega(\alpha) \in \mathbb{A}_h$ peut être écrit comme une combinaison convexe de N sommets Ω_j de \mathbb{A}_h . Les lois de commande suivantes sont considérées

$$u(k) = Kx(k); \quad u_h(k) = K_h x(k-h) \quad (5.4)$$

dans lesquelles $K \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$ et $K_h \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$. Dans ce chapitre, les conditions convexes pour la synthèse de K et K_h ne dépendent pas de la valeur du retard h , mais permettent l'utilisation de l'état en retard dans le cas de h connu. Si h est inconnu, alors on ne doit considérer que $u(k)$ (loi de commande sans mémoire), et dans ce cas, $K_h = \mathbf{0}$.

Donc, en utilisant (5.4) et (5.1)-(5.3), le système incertain en boucle fermée est donné par

$$\tilde{\Omega}(\alpha) : \begin{cases} x(k+1) = \tilde{A}(\alpha)x(k) + \tilde{A}_d(\alpha)x(k-h) + B_w(\alpha)w(k) \\ z(k) = \tilde{C}(\alpha)x(k) + \tilde{C}_d(\alpha)x(k-h) + D_w(\alpha)w(k) \\ x(k) = 0, \quad k \leq 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

où $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ est donné par

$$\tilde{\mathbb{A}}_h \triangleq \left\{ \tilde{\Omega}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n+p \times 2n+\ell} : \tilde{\Omega}(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \tilde{\Omega}_j, \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, N \right\} \quad (5.6)$$

et les matrices sommets de la boucle fermée sont

$$\tilde{A}_j \triangleq A_j + B_j K; \quad \tilde{A}_{dj} \triangleq A_{hj} + B_{hj} K_h \quad (5.7)$$

$$\tilde{C}_j \triangleq C_j + D_j K; \quad \tilde{C}_{dj} \triangleq C_{hj} + D_{hj} K_h \quad (5.8)$$

en définissant les sommets correspondants

$$\tilde{\Omega}_j \triangleq \left[\begin{array}{cc|cc|c} \tilde{A}_j & \tilde{A}_{dj} & B_{wj} \\ \tilde{C}_j & \tilde{C}_{dj} & D_{wj} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N \quad (5.9)$$

Le but principal de ce chapitre est de résoudre les problèmes suivants, où le retard du système est considéré fixe et supérieur ou égal à zéro :

Problème 5.1 (*La commande robuste*)

Etant donné le système incertain $\Omega(\alpha) \in \mathbb{A}_h$ où Ω_j est donné par

$$\Omega_j = \left[\begin{array}{cc|cc|c} A_j & A_{hj} & B_j & B_{hj} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N \quad (5.10)$$

déterminer des gains de retour d'état K et K_h tels que le système incertain en boucle fermée correspondant $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ avec

$$\tilde{\Omega}_j = \left[\begin{array}{cc|cc|c} \tilde{A}_j & \tilde{A}_{dj} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N. \quad (5.11)$$

et $\tilde{A}_j, \tilde{A}_{dj}$ définies en (5.7) est robustement stable.

Problème 5.2 (La commande robuste \mathcal{H}_∞) Etant donné le système incertain $\Omega(\alpha) \in \mathbb{A}_h$ où Ω_j est défini en (5.3) et un scalaire $\gamma > 0$, déterminer des gains de retour d'état K et K_h , tels que le système incertain en boucle fermée $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ donné par (5.5)-(5.9) est robustement stable et que, de façon additionnelle, pour tout $w(k) \in \ell_2$ on ait $z(k) \in \ell_2$ satisfaisant

$$\|z(k)\|_2 < \gamma \|w(k)\|_2 \quad (5.12)$$

Tout γ satisfaisant (5.12) est un coût garanti \mathcal{H}_∞ pour le système.

5.2 Stabilité robuste

Tout d'abord, on étudie l'analyse de stabilité robuste du système incertain en boucle fermée $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ où $\tilde{\Omega}_j$ est donné en (5.11), et on présente des conditions suffisantes du type LMI. A partir de ces conditions, qui sont de dimension infinie dans le paramètre incertain α , on propose une solution convexe et de dimension finie pour le Problème 5.1.

Le théorème suivant établit quatre conditions équivalentes basées sur l'existence de matrices de Lyapunov-Krasovskii dépendantes de paramètres, qui assurent la stabilité robuste du système $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ avec (5.11).

Théorème 5.1 Le système incertain à temps discret $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ avec (5.11) est robustement stable indépendamment du retard de temps h , s'il existe des matrices symétriques définies positives et dépendantes de paramètres $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $S(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles qu'une des conditions équivalentes suivantes soit vérifiée pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^N : \alpha_j \geq 0$ et $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$:

a) La fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii $V(x(k))$ donnée par

$$V(\alpha, x(k)) \triangleq x(k)'P(\alpha)x(k) + \sum_{j=0}^h x(k-j)'S(\alpha)x(k-j) \quad (5.13)$$

est telle que

$$V(\alpha, x(k)) > 0 \quad \text{et} \quad \Delta V(\alpha, x(k)) \triangleq V(\alpha, x(k+1)) - V(\alpha, x(k)) < 0 \quad (5.14)$$

pour tout $\begin{bmatrix} x(k)' & x(k-h)' \end{bmatrix}' \neq \mathbf{0}$.

b)

$$\Upsilon(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{A}(\alpha)'((S(\alpha) + P(\alpha))\tilde{A}(\alpha) - P(\alpha)) & \tilde{A}(\alpha)'((S(\alpha) + P(\alpha))\tilde{A}_d(\alpha) \\ \star & \tilde{A}_d(\alpha)'((S(\alpha) + P(\alpha))\tilde{A}_d(\alpha) - S(\alpha)) \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (5.15)$$

c)

$$\Theta(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} -(S(\alpha) + P(\alpha)) & (S(\alpha) + P(\alpha))\tilde{A}(\alpha) & (S(\alpha) + P(\alpha))\tilde{A}_d(\alpha) \\ \star & -P(\alpha) & \mathbf{0} \\ \star & \star & -S(\alpha) \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (5.16)$$

d) Il existe des matrices dépendantes de paramètre $F(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $H(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles

que

$$\mathcal{M}(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} F(\alpha) + F(\alpha)' + P(\alpha) + S(\alpha) & G(\alpha)' - F(\alpha)' \tilde{A}(\alpha) & & \\ \star & -(P(\alpha) + G(\alpha) \tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)' G(\alpha)') & & \\ \star & \star & & \\ & & H(\alpha)' - F(\alpha)' \tilde{A}_d(\alpha) & \\ & & -(G(\alpha) \tilde{A}_d(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)' H(\alpha)') & \\ & & -(S(\alpha) + H(\alpha) \tilde{A}_d(\alpha) + \tilde{A}_d(\alpha)' H(\alpha)') & \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (5.17)$$

Remarquons que les quatre conditions équivalentes sont suffisantes pour la stabilité robuste de $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ avec (5.11), étant établies en termes de matrices dépendantes de paramètres $P(\alpha)$, $S(\alpha)$, $F(\alpha)$, $G(\alpha)$ et $H(\alpha)$. Ces conditions ont besoin d'être vérifiées pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^N : \alpha_j \geq 0$ et $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$, $j = 1, \dots, N$, ce que rend ce problème de dimension infinie en α (dans le cas où α a des intervalles continus en son domaine). Remarquons encore que les conditions du Théorème 5.1 sont valides pour n'importe quels ensembles $\tilde{\Omega}(\alpha)$, convexes ou non. Une observation à propos du Théorème 5.1 est que les variables matricielles additionnelles dans la condition *d*) peuvent être utilisées pour proposer des conditions moins conservatives pour l'évaluation de stabilité robuste, et aussi donner des conditions pour la synthèse de commande robuste comme solution du Problème 5.1.

Le problème de dimension infinie dans les équations (5.15)-(5.17) peut être approché par un ensemble fini de LMI, écrites en termes des sommets $\tilde{\Omega}_j$ de $\tilde{\mathbb{A}}_h$, en suivant les mêmes idées que celles présentées dans les chapitres 2 et 3. Cependant, ces extensions ne sont pas présentées dans ce travail. Une autre approche consiste à fixer les matrices additionnelles $F(\alpha) = F$, $G(\alpha) = G$ et $H(\alpha) = H$ et imposer la structure suivante pour les matrices dépendantes de paramètres $P(\alpha)$ et $S(\alpha)$ de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii

$$P(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j P_j; \quad S(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j S_j; \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1; \quad \alpha_j \geq 0 \quad (5.18)$$

comme l'on expose dans le théorème suivant.

Théorème 5.2 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$, et des matrices $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que*

$$\mathcal{M}_j \triangleq \begin{bmatrix} F + F' + P_j + S_j & G' - F \tilde{A}_j & H' - F \tilde{A}_{dj} \\ \star & -(P_j + G \tilde{A}_j + \tilde{A}_j' G') & -(G \tilde{A}_{dj} + \tilde{A}_j' H') \\ \star & \star & -(S_j + H \tilde{A}_{dj} + \tilde{A}_{dj}' H') \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (5.19)$$

alors les conditions du Théorème 5.1 sont vérifiées avec $F(\alpha) = F$, $G(\alpha) = G$, $H(\alpha) = H$ et $P(\alpha)$, $S(\alpha)$, données en (5.18).

Remarquons que la condition de stabilité quadratique pourrait être imposée comme une solution particulière du Théorème 5.1, en fixant des matrices de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii, c'est-à-dire, en faisant $P(\alpha) = P$ et $S(\alpha) = S$. On peut retrouver cette condition à partir du Théorème 5.2, en imposant $P_i = P$, $S_i = S$, $F = F' = -(S + P)$ et $G = H = \mathbf{0}$ en (5.19), comme cela est présenté dans le corollaire suivant.

Corollaire 5.1 *S'il existe des matrices symétriques positives définies $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que*

$$\Theta_j^q \triangleq \begin{bmatrix} -(P+S) & (P+S)\tilde{A}_j & (P+S)\tilde{A}_{dj} \\ \star & -P & \mathbf{0} \\ \star & \star & -S \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (5.20)$$

alors les conditions du Théorème 5.1 sont vérifiées avec $P(\alpha) = P$, $S(\alpha) = S$, $F(\alpha) = F(\alpha)' = -(P+S)$ et $G(\alpha) = H(\alpha) = \mathbf{0}$, en impliquant que le système en boucle fermée $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ avec (5.11) est quadratiquement stable indépendamment de la valeur h du retard.

L'utilisation de matrices fixes P et S dans le Corollaire 5.1 assure la stabilité du système, même dans le cas de matrices incertaines variants dans le temps $\tilde{A}(\alpha)$ et $\tilde{A}_d(\alpha)$. Observez encore que des conditions de stabilité robuste similaires à celles présentées ici peuvent être obtenues en termes du système dual $\tilde{\Omega}(\alpha)$, c'est-à-dire en changeant $\tilde{A}(\alpha)$ par $\tilde{A}(\alpha)'$ et $\tilde{A}_d(\alpha)$ par $\tilde{A}_d(\alpha)'$ dans (5.15)-(5.17) et \tilde{A}_j par \tilde{A}_j' et \tilde{A}_{dj} par \tilde{A}_{dj}' dans (5.19)-(5.20).

5.3 Commande robuste

Dans cette section, on utilise le degré de liberté additionnel proposé par les matrices F , G et H dans le Théorème 5.2 et dans le Corollaire 5.1, pour obtenir des conditions suffisantes pour résoudre le Problème 5.1. Pour cela, considérons le système incertain à temps discret et à retard dans les états défini par $\Omega(\alpha) \in \mathbb{A}_h$ avec (5.10) et supposons que les vecteurs d'état, $x(k)$, et d'état en retard, $x(k-h)$ soient disponibles pour retour. On donne ci-dessous une condition suffisante pour l'existence de gains robustes de retour d'état K et K_h tels que, avec $u(k)$ et $u(k-h)$ donnés en (5.4), le système incertain en boucle fermée $\tilde{\Omega}(\alpha)$ soit robustement stable.

Théorème 5.3 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $\tilde{P}_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\tilde{S}_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$, et des matrices $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$ et $Z_h \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$ telles que*

$$\Xi_j \triangleq \begin{bmatrix} L' + L + \tilde{P}_j + \tilde{S}_j & -(A_j L + B_j Z) & -(A_{hj} L + B_{hj} Z_h) \\ \star & -\tilde{P}_j & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\tilde{S}_j \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (5.21)$$

alors les gains robustes de retour d'état K et K_h donnés par

$$K = ZL^{-1} \text{ et } K_h = Z_h L^{-1} \quad (5.22)$$

sont tels que le système en boucle fermée $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ avec (5.11) est robustement stable, indépendamment de la valeur h du retard. De plus, $P_j = (L')^{-1} \tilde{P}_j L^{-1}$ et $S_j = (L')^{-1} \tilde{S}_j L^{-1}$, $j = 1, \dots, N$, $P(\alpha)$, $S(\alpha)$, données en (5.18) et $F = (L')^{-1}$, $G = H = \mathbf{0}$ sont telles que les conditions du Théorème 5.2 sont vérifiées.

Remarquons qu'une condition similaire à (5.21) pourrait être obtenue en imposant $G = H = \mathbf{0}$ dans \mathcal{M}_j (Théorème 5.2), en utilisant la représentation du système incertain dual, c'est-à-dire en changeant \tilde{A}_j par $(A_j + B_j K)'$ et \tilde{A}_{dj} par $(A_{hj} + B_{hj} K_h)'$ et alors en appliquant le changement de variables $Z = KL$ et $Z_h = K_h L$.

Remarquons encore que, si le vecteur d'état retardé, $x(k-h)$, n'est pas disponible (par exemple, si h est inconnu) les conditions du Théorème 5.3 peuvent encore être utilisées, en imposant $Z_h = \mathbf{0}$ dans (5.21). Enfin, il est important de relever que le Théorème 5.3 contient les résultats de stabilisation quadratique, comme cela est établi dans le corollaire suivant.

Corollaire 5.2 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\tilde{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et des matrices $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$ et $Z_h \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$ telles que*

$$\Xi_j^q \triangleq \begin{bmatrix} L' + L + \tilde{P} + \tilde{S} & -(A_j L + B_j Z) & -(A_{hj} L + B_{hj} Z_h) \\ \star & -\tilde{P} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\tilde{S} \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (5.23)$$

alors les gains robustes de retour d'état K et K_h donnés par (5.22) sont tels que le système incertain en boucle fermée $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ avec (5.11) est quadratiquement stable, indépendamment de la valeur h du retard.

Bien qu'il existe dans la littérature des résultats équivalents pour la stabilisation quadratique (lesquels généralement ne sont pas formulés en termes de LMI), le Corollaire 5.2 dispense une condition plus intéressante pour traiter des restrictions de structure dans les gains de retour. Cela vient du fait que la matrice additionnelle L utilisée pour le calcul des gains de commande n'apparaît pas dans la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii. Le choix $L = -(\tilde{P} + \tilde{S})$ récupère la condition de stabilisation quadratique standard, comme cela est présenté dans le corollaire suivant.

Corollaire 5.3 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\tilde{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et des matrices $Z \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$ et $Z_h \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$ telles que*

$$\Xi_j^{q2} \triangleq \begin{bmatrix} -(\tilde{P} + \tilde{S}) & A_j \tilde{P} + A_j \tilde{S} + B_j Z & A_{hj} \tilde{P} + A_{hj} \tilde{S} + B_{hj} Z_h \\ \star & -\tilde{P} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\tilde{S} \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (5.24)$$

alors les gains robustes de retour d'état K et K_h donnés par

$$K = Z(\tilde{P} + \tilde{S})^{-1} \text{ et } K_h = Z_h(\tilde{P} + \tilde{S})^{-1} \quad (5.25)$$

sont tels que le système incertain en boucle fermée $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ avec (5.11) est quadratiquement stable, indépendamment de la valeur h du retard.

Remarquons qu'une condition équivalente pour la stabilisation quadratique pourrait être obtenue directement du Corollaire 5.1, en considérant le système dual, c'est-à-dire, en changeant \tilde{A}_j par $(A_j + B_j K)'$ et \tilde{A}_{dj} par $(A_{hj} + B_{hj} K_h)'$, et en utilisant la linéarisation de variables données par $(P + S)K' = Z$ et $(P + S)K'_h = Z_h$. Les bénéfices du Corollaire 5.2 par rapport au Corollaire 5.3 restent plus évidents dans la synthèse de commande décentralisée. En fait, grâce au degré supplémentaire de liberté amené par la matrice L , des gains robustes décentralisés pour le retour d'état peuvent être calculés à partir du Corollaire 5.2, sans imposer de restrictions de structure dans les matrices de Lyapunov-Krasovskii. Enfin, il est important de relever que, contrairement à la plus grande partie des résultats trouvés dans la littérature, les Théorèmes 5.2 et 5.3 et les Corollaires 5.1, 5.2 et 5.3 sont formulés comme des conditions LMI convexes, de dimension finie, permettant une solution efficace pour les problèmes de stabilité et stabilisation robuste, grâce à l'utilisation d'algorithmes spécialisés qui peuvent être résolus en temps polynomial.

5.4 Commande robuste \mathcal{H}_∞

Dans cette section, le coût garanti \mathcal{H}_∞ du système incertain $\tilde{\Omega}(\alpha)$ donné en (5.5)-(5.9) est lié à l'existence de matrices dépendantes de paramètres qui satisfont quelques conditions convexes équivalentes.

En imposant une structure spéciale à ces matrices, il est possible obtenir des conditions LMI suffisantes pour le coût garanti \mathcal{H}_∞ . On peut alors proposer des conditions suffisantes LMI pour la synthèse de gains robustes K et K_h , résolvant le Problème 5.2.

Théorème 5.4 *Le système incertain à temps discret $\tilde{\Omega}(\alpha)$ donné en (5.5)-(5.9) est robustement stable à un coût garanti \mathcal{H}_∞ donné par $\gamma = \sqrt{\mu}$, indépendamment de la valeur h du retard, s'il existe des matrices symétriques définies positives dépendantes de paramètres $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $S(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles, qu'une des conditions équivalentes suivantes soit vérifiée pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^N : \alpha_j \geq 0$ et $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$:*

a)

$$\mathcal{N}(\alpha) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \Upsilon(\alpha) & \begin{array}{c} \tilde{A}(\alpha)'(P(\alpha) + S(\alpha))B_w(\alpha) \\ \tilde{A}_d(\alpha)'(P(\alpha) + S(\alpha))B_w(\alpha) \end{array} \\ \hline \star & B_w(\alpha)'(P(\alpha) + S(\alpha))B_w(\alpha) - \mu \mathbf{I}_\ell \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \tilde{C}(\alpha)' \\ \tilde{C}_d(\alpha)' \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \tilde{C}(\alpha)' \\ \tilde{C}_d(\alpha)' \end{array} \right]' < \mathbf{0} \quad (5.26)$$

où $\Upsilon(\alpha)$ est donné en (5.15).

b)

$$\mathcal{R}(\alpha) \triangleq \left[\begin{array}{c|cc} \Theta(\alpha) & \mathbf{0} & (P(\alpha) + S(\alpha))B_w(\alpha) \\ & \tilde{C}(\alpha)' & \mathbf{0} \\ & \tilde{C}_d(\alpha)' & \mathbf{0} \\ \hline \star & -\mathbf{I}_p & D_w(\alpha) \\ & \star & -\mu \mathbf{I}_\ell \end{array} \right] < \mathbf{0} \quad (5.27)$$

où $\Theta(\alpha)$ est donné en (5.16).

c) *Il existe des matrices dépendantes de paramètres $F(\alpha)$, $F_2(\alpha)$, $G(\alpha)$, $G_2(\alpha)$, $H(\alpha)$, $H_2(\alpha)$, $X_1(\alpha)$, $X_2(\alpha)$, $M_1(\alpha)$ et $M_2(\alpha)$, telles que*

$$\mathcal{Q}(\alpha) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{M}(\alpha) + \mathbf{Q}_1(\alpha) & \mathbf{Q}_2(\alpha) \\ \hline \star & \mathbf{Q}_3(\alpha) \end{array} \right] < \mathbf{0} \quad (5.28)$$

où $\mathcal{M}(\alpha)$ est donné en (5.17) et

$$\mathbf{Q}_1(\alpha) \triangleq \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{0} & -F_2(\alpha)\tilde{C}(\alpha) & -F_2(\alpha)\tilde{C}_d(\alpha) \\ \star & -(G_2(\alpha)\tilde{C}(\alpha) + \tilde{C}(\alpha)'G_2(\alpha)') & -(G_2(\alpha)\tilde{C}_d(\alpha) + \tilde{C}(\alpha)'H_2(\alpha)') \\ \star & \star & -(H_2(\alpha)\tilde{C}_d(\alpha) + \tilde{C}_d(\alpha)'H_2(\alpha)') \end{array} \right] \quad (5.29)$$

$$\mathbf{Q}_2(\alpha) \triangleq \left[\begin{array}{c} X_1(\alpha)' + F_2(\alpha) \\ G_2(\alpha) - (\tilde{A}(\alpha)'X_1(\alpha)' + \tilde{C}(\alpha)'X_2(\alpha)') \\ H_2(\alpha) - (\tilde{A}_d(\alpha)'X_1(\alpha)' + \tilde{C}_d(\alpha)'X_2(\alpha)') \\ M_1(\alpha)' - (F_1(\alpha)B_w(\alpha) + F_2(\alpha)D_w(\alpha)) \\ -(G(\alpha)B_w(\alpha) + G_2(\alpha)D_w(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)'M_1(\alpha)' + \tilde{C}(\alpha)'M_2(\alpha)') \\ -(H(\alpha)B_w(\alpha) + H_2(\alpha)D_w(\alpha) + \tilde{A}_d(\alpha)'M_1(\alpha)' + \tilde{C}_d(\alpha)'M_2(\alpha)') \end{array} \right] \quad (5.30)$$

$$\mathbf{Q}_3(\alpha) \triangleq \left[\begin{array}{c} \mathbf{I}_p + X_2(\alpha) + X_2(\alpha)' \\ \star \\ M_2(\alpha)' - (X_1(\alpha)B_w(\alpha) + X_2(\alpha)D_w(\alpha)) \\ -(\mu \mathbf{I}_\ell + M_1(\alpha)B_w(\alpha) + B_w(\alpha)'M_1(\alpha)' + M_2(\alpha)D_w(\alpha) + D_w(\alpha)'M_2(\alpha)') \end{array} \right] \quad (5.31)$$

De même que dans le Théorème 5.1, les conditions du Théorème 5.4 ont besoin d'être vérifiées pour toutes les valeurs admissibles de α , en étant valides pour n'importe quel ensemble d'incertitudes $\tilde{\mathcal{D}}$. On donne ensuite une condition convexe de dimension finie, en assurant que les équations (5.26)-(5.28) sont vérifiées.

Théorème 5.5 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $S_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$, des matrices de dimensions appropriées F , F_2 , G , G_2 , H , H_2 , X_1 , X_2 , M_1 , M_2 et un scalaire positif $\gamma = \sqrt{\mu}$ tels que*

$$\mathcal{Q}_j \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{M}_j + \mathbf{Q}_{1j} & \mathbf{Q}_{2j} \\ \hline \star & \mathbf{Q}_{3j} \end{array} \right] < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (5.32)$$

où \mathcal{M}_j est définie en (5.19) et

$$\mathbf{Q}_{1j} \triangleq \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{0} & -F_2 \tilde{C}_j & -F_2 \tilde{C}_{dj} \\ \star & -(G_2 \tilde{C}_j + \tilde{C}_j' G_2') & -(G_2 \tilde{C}_{dj} + \tilde{C}_{dj}' G_2') \\ \star & \star & -(H_2 \tilde{C}_{dj} + \tilde{C}_{dj}' H_2') \end{array} \right] \quad (5.33)$$

$$\mathbf{Q}_{2j} \triangleq \left[\begin{array}{cc} X_1' + F_2 & M_1' - (F B_{wj} + F_2 D_{wj}) \\ G_2 - (\tilde{A}_j' X_1' + \tilde{C}_j' X_2') & -(G B_{wj} + G_2 D_{wj} + \tilde{A}_j' M_1' + \tilde{C}_j' M_2') \\ H_2 - (\tilde{A}_{dj}' X_1' + \tilde{C}_{dj}' X_2') & -(H B_{wj} + H_2 D_{wj} + \tilde{A}_{dj}' M_1' + \tilde{C}_{dj}' M_2') \end{array} \right] \quad (5.34)$$

$$\mathbf{Q}_{3j} \triangleq \left[\begin{array}{cc} \mathbf{I}_p + X_2 + X_2' & M_2' - (X_1 B_{wj} + X_2 D_{wj}) \\ \star & -(\mu \mathbf{I}_\ell + M_1 B_{wj} + B_{wj}' M_1' + M_2 D_{wj} + D_{wj}' M_2') \end{array} \right] \quad (5.35)$$

alors le système $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$ est robustement stable à un coût garanti \mathcal{H}_∞ donné par γ . De plus, les conditions du Théorème 5.4 sont assurées avec $F(\alpha) = F$, $F_2(\alpha) = F_2$, $G(\alpha) = G$, $G_2(\alpha) = G_2$, $H(\alpha) = H$, $H_2(\alpha) = H_2$, $X_1(\alpha) = X_1$, $X_2(\alpha) = X_2$, $M_1(\alpha) = M_1$, $M_2(\alpha) = M_2$, $P(\alpha)$ et $S(\alpha)$ définies comme en (5.18).

Remarquons que, avec les résultats du Théorème 5.5, le problème d'optimisation convexe suivant peut être formulé, en cherchant le minimum $\gamma = \sqrt{\mu}$ tel que

$$\mathcal{P}_{\mathcal{H}_\infty} : \left\{ \begin{array}{l} \min \mu \\ P_j = P_j' > \mathbf{0}; S_j = S_j' > \mathbf{0} \\ F, F_2, G, G_2, H, H_2, X_1, X_2, M_1, M_2 \\ \text{tel que (5.32) est vérifiée.} \end{array} \right. \quad (5.36)$$

On peut obtenir des conditions quadratiques à partir des résultats du Théorème 5.5 : pour cela, il est suffit d'imposer $P_j = P = P' > \mathbf{0}$ et $S_j = S = S' > \mathbf{0}$, $j = 1, \dots, N$, $F = -(P + S)$, $X_2 = -\mathbf{I}_p$, et en prenant les matrices H , G , F_2 , H_2 , G_2 , X_1 , M_1 et M_2 égales à zéro dans (5.32). Cette approche permet le calcul du coût garanti \mathcal{H}_∞ pour le système $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$ à paramètre incertain dans le temps et à retard fixe. On énonce ce résultat dans le corollaire suivant.

Corollaire 5.4 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et un scalaire positif $\gamma = \sqrt{\mu}$ tels que*

$$\mathcal{R}_j = \left[\begin{array}{c|cc} \Theta_j^q & \mathbf{0} & (P + S) B_{wj} \\ & \tilde{C}_j' & \mathbf{0} \\ & \tilde{C}_{dj}' & \mathbf{0} \\ \hline \star & -\mathbf{I}_p & D_{wj} \\ & \star & -\mu \mathbf{I}_\ell \end{array} \right] < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (5.37)$$

où Θ_j^q est donnée en (5.20), alors le système $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$ est quadratiquement stable à un coût garanti \mathcal{H}_∞ .

Ensuite, on utilise les variables matricielles additionnelles présentes dans le Théorème 5.5 pour proposer une solution pour le Problème 5.2.

Théorème 5.6 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $\tilde{P}_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\tilde{S}_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$, des matrices $Z \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$, $Z_h \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et des scalaires $0 < \beta \leq 1$ et $\gamma = \sqrt{\mu} > 0$ tels que*

$$\Pi_j \triangleq \left[\begin{array}{c|cc} & \mathbf{0} & -B_{wj} \\ \Xi_j & -(L'C'_j + Z'D'_j) & \mathbf{0} \\ & -(L'C'_{hj} + Z'_h D'_{hj}) & \mathbf{0} \\ \hline \star & -\beta \mathbf{I}_p & -D_{wj} \\ & \star & -\mu \mathbf{I}_\ell \end{array} \right] < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (5.38)$$

où Ξ_j est donnée en (5.21), alors les gains robustes de retour d'état K et K_h donnés par (5.22) sont tels que la boucle fermée du système $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$ est robustement stable à coût garanti \mathcal{H}_∞ donné par γ , indépendamment de la valeur h du retard.

Comme dans le cas de la stabilisation robuste (Section 5.2), il est possible de traiter des systèmes variants dans le temps, en considérant des matrices fixes et indépendantes de paramètres dans la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii. Le corollaire suivant présente une condition suffisante pour la stabilisation quadratique en assurant un coût garanti \mathcal{H}_∞ donné par γ pour le système $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$ à paramètre variant dans le temps et à retard fixe.

Corollaire 5.5 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\tilde{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, des matrices $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times m_1}$, $Z_h \in \mathbb{R}^{n \times m_2}$ et des scalaires $0 < \beta \leq 1$ et $\gamma = \sqrt{\mu}$ tels que*

$$\Pi_j^q \triangleq \left[\begin{array}{c|cc} & \mathbf{0} & -B_{wj} \\ \Xi_j^q & -(L'C'_j + Z'D'_j) & \mathbf{0} \\ & -(L'C'_{hj} + Z'_h D'_{hj}) & \mathbf{0} \\ \hline \star & -\beta \mathbf{I}_p & -D_{wj} \\ & \star & -\mu \mathbf{I}_\ell \end{array} \right] < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (5.39)$$

alors les gains robustes de retour d'état K et K_h donnés par (5.22) sont tels que le système en boucle fermée $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$ est quadratiquement stable à un coût garanti \mathcal{H}_∞ donné par γ , indépendamment de la valeur h du retard.

Le choix $L = -(\tilde{P} + \tilde{S})$ dans le Corollaire 5.5 donne aussi une condition de stabilisation à coût garanti \mathcal{H}_∞ donné par γ .

Corollaire 5.6 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\tilde{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, des matrices $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times m_1}$, $Z_h \in \mathbb{R}^{n \times m_2}$, et des scalaires $0 < \beta \leq 1$ et $\gamma = \sqrt{\mu}$ tels que*

$$\left[\begin{array}{c|cc} & \mathbf{0} & -B_{wj} \\ \Xi_j^{q2} & \tilde{P}C'_j + \tilde{S}C'_j + Z'D'_j & \mathbf{0} \\ & \tilde{P}C'_{hj} + \tilde{S}C'_{hj} + Z'_h D'_{hj} & \mathbf{0} \\ \hline \star & -\beta \mathbf{I}_p & -D_{wj} \\ & \star & -\mu \mathbf{I}_\ell \end{array} \right] < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (5.40)$$

où Ξ_j^{q2} est donnée en (5.24), alors les gains robustes de retour d'état K et K_h donnés par (5.25) sont tels que le système en boucle fermée $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$ est quadratiquement stable à un coût garanti \mathcal{H}_∞ donné par γ , indépendamment de la valeur h du retard.

De même qu'observé auparavant, les conditions proposées dans le Corollaire 5.5 sont plus adéquates pour traiter des restrictions de structure dans les gains de commande que les conditions du Corollaire 5.6. Cela est dû au degré supplémentaire de liberté induit par la matrice L .

Il est important de mentionner que le Théorème 5.6 présente une solution convexe sous forme de LMI à dimension finie pour le Problème 5.2, qui peut être évaluée en temps polynomial par des algorithmes spécialisés de points intérieurs [GNLC95]. De plus, toutes les matrices du système peuvent être affectées par des incertitudes. Les gains de retour d'état K et K_h qui donnent le plus petit niveau d'atténuation $\gamma = \sqrt{\mu}$ tel que (5.38) est vérifiée, peuvent être obtenus à partir du problème convexe d'optimisation suivant :

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{H}_\infty} : \begin{cases} \min & \mu \\ \tilde{P}_j = \tilde{P}'_j > \mathbf{0}; \quad \tilde{S}_j = \tilde{S}'_j > \mathbf{0} \\ Z, Z_h, L, 0 < \beta \leq 1 \\ \text{tel que (5.38) est vérifiée} \end{cases} \quad (5.41)$$

5.5 Complexité numérique et extensions

Les conditions proposées dans ce chapitre peuvent être résolues en temps polynomial par l'utilisation d'algorithmes de points intérieurs, dont la complexité numérique est associée au nombre de lignes LMI, \mathcal{L} , et au nombre de variables scalaires, \mathcal{K} , utilisées dans le problème. Par exemple, en utilisant la *LMI Control Toolbox*, le nombre d'opérations en point flottant est de l'ordre de $\mathcal{K}^3 \mathcal{L}$ [GNLC95]. D'autres méthodes peuvent avoir un comportement différent. Dans le Tableau 5.1, on donne le nombre de variables scalaires, \mathcal{K} , et le nombre de lignes LMI, \mathcal{L} , associées à chaque condition présentée dans ce chapitre. Observons que dans les problèmes d'optimisation $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_\infty}$, (5.36), et $\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{H}_\infty}$, (5.41), le nombre de variables d'optimisation montré dans le Tableau 5.1 a besoin d'être augmenté de un, puisque dans ce cas la variable $\mu = \gamma^2$ est aussi une variable d'optimisation.

5.5.1 Commande décentralisée

Les résultats présentés dans la Section 5.3 (Théorème 5.3 et Corollaire 5.2) et dans la Section 5.4 (Théorème 5.6 et Corollaire 5.5) peuvent aussi être utilisés pour la synthèse de commande décentralisée, par l'imposition d'une structure décentralisée aux matrices $L = L_D = \text{bloc-diagonal}\{L^1, \dots, L^M\}$, $Z = Z_D = \text{bloc-diagonal}\{Z^1, \dots, Z^M\}$, $Z_h = Z_{dD} = \text{bloc-diagonal}\{Z_h^1, \dots, Z_h^M\}$, où M dénote le nombre de sous-systèmes, résultant en gains de retour d'état bloc-diagonaux $K_D = Z_D L_D^{-1}$ et $K_{dD} = Z_{dD} L_D^{-1}$. Remarquons que dans ce cas on n'impose aucune restriction aux matrices $P(\alpha)$ et $S(\alpha)$ utilisées dans la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii. De plus, il est possible de chercher des lois de commande qui n'utilisent que $x(k)$ ou $x(k-h)$ pour le retour, décentralisées ou non, simplement en fixant $Z = \mathbf{0}$ ou $Z_h = \mathbf{0}$ dans les LMIs.

		Critère	\mathcal{K} (n. de variables scalaires)	\mathcal{L} (n. de lignes LMIs)
Analyse	Stabilité	Théorème 5.2	$3n^2 + Nn(n+1)$	$3Nn$
		Corollaire 5.1	$n(n+1)$	
	\mathcal{H}_∞	Théorème 5.5	$n^2(3+N) + n(p+N) + \ell(n+p) + p(3n+p)$	$N(3n+p+\ell)$
		Corollaire 5.4	$n(n+1)$	
Synthèse	Stabilité	Théorème 5.3	$n(N(n+1) + n + m_1 + m_2)$	$3Nn$
		Corollaire 5.2	$n(2n + m_1 + m_2 + 1)$	
		Corollaire 5.3	$n(n + m_1 + m_2 + 1)$	
	\mathcal{H}_∞	Théorème 5.6	$1 + n(N(n+1) + n + m_1 + m_2)$	$N(3n+p+\ell)$
		Corollaire 5.5	$1 + n(2n + m_1 + m_2 + 1)$	
		Corollaire 5.6	$1 + n(n + m_1 + m_2 + 1)$	

TAB. 5.1 – Nombre de variables scalaires, \mathcal{K} , et nombre de lignes LMI, \mathcal{L} .

5.5.2 Des fautes d'actionneurs

Les résultats présentés dans ce chapitre peuvent être utilisés pour étudier la stabilité robuste et pour la synthèse de gains robustes pour le retour d'état, en assurant la stabilité et la performance du système en boucle fermée soumis à des fautes d'actionneurs. En fait, le problème de faute d'actionneurs peut être traité comme un cas spécial d'incertitude affectant les matrices d'entrées $B(\alpha)$ et $B_h(\alpha)$. De plus, en utilisant les résultats basés sur la stabilité quadratique, c'est-à-dire, en fixant les matrices de Lyapunov-Krasovskii, on peut traiter des fautes d'actionneurs dans le contexte de systèmes variants dans le temps, en assurant la stabilité robuste et la performance \mathcal{H}_∞ garantie, même avec des fautes partielles ou totales d'actionneurs.

Remarque 5.1 Dans [LTP04a], on étudie des conditions pour le calcul du coût garanti \mathcal{H}_∞ et pour la synthèse de gains robustes K et K_h , qui minimisent la norme \mathcal{H}_∞ entre le signal d'entrée de perturbation et le signal de sortie de systèmes linéaires incertains à temps discret et à retard dans les états, mais sans retard dans l'équation de sortie ($C_h = \mathbf{0}$ et $D_h = \mathbf{0}$).

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a étudié la commande robuste \mathcal{H}_∞ pour les systèmes à temps discret et à retard dans les états. Contrairement à d'autres résultats de la littérature, toutes les matrices du système peuvent

être affectées par des incertitudes. Ces incertitudes sont exprimées sous forme polytopique, à sommets connus. Par l'utilisation d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii dépendante de paramètres, on a obtenu, sous forme de LMI, des conditions du type "indépendant du retard", moins conservatives, pour l'analyse de stabilité robuste et pour le calcul du coût garanti \mathcal{H}_∞ . De plus, on a présenté des conditions du type LMI, suffisantes pour la détermination de gains robustes de retour d'état pour la stabilisation et pour la commande à coût garanti \mathcal{H}_∞ . Ces conditions peuvent donner un gain qui dépend d'état retardé, utilisable seulement quand la valeur du retard est connue. Grâce à la convexité, des restrictions additionnelles, telles que décentralisation et commande soumise à des fautes d'actionneurs, peuvent être facilement incorporées aux conditions LMI.

Chapitre 6

Commentaires finaux

Dans ce travail, on a étudié des fonctionnelles de Lyapunov et de Lyapunov-Krasovskii dépendantes de paramètres, pour traiter des problèmes dans le contexte de la théorie de commande robuste. Avec l'utilisation de ces fonctionnelles, il a été possible d'obtenir des conditions, formulées comme des tests de faisabilité de LMI, qui présentent des résultats bien moins conservatifs que d'autres conditions trouvées dans la littérature pour des systèmes à incertitudes du type polytopique. On a obtenu des formulations convexes (suffisantes) pour la solution des problèmes suivants :

- \mathcal{D} -stabilité robuste de polytopes de matrices ;
- \mathcal{D} -stabilité robuste de polytopes de polynômes matriciels ;
- Stabilité robuste de systèmes neutres à retards variants dans le temps et, en particulier, de systèmes à retard dans les états ;
- Stabilité robuste de systèmes discrets dans le temps et à retard dans les états ;
- Calcul du coût garanti \mathcal{H}_∞ de systèmes discrets dans le temps à retard dans les états et la sortie ;
- Synthèse de gains de retour d'état pour des systèmes discrets dans le temps et à retard dans les états, en assurant une performance \mathcal{H}_∞ .

Des parties des résultats présentés dans ce texte apparaissent dans les travaux [dOLP04], [dOOL⁺02a], [dOOL⁺02b], [LMd⁺04], [LMRP02], [LOdP04], [LP03b], [LP03a], [LPT03], [LTP04b], [LTP], [LTP04a] et [PTGL03].

On peut conclure que l'utilisation de fonctions de Lyapunov et de Lyapunov-Krasovskii dépendantes de paramètres, alliée à l'application du Lemme de Finsler dans les problèmes étudiés, mène à une réduction significative du conservatisme des conditions d'analyse de stabilité robuste et de synthèse robuste. Comme conséquence de cette réduction de conservatisme, il y a une augmentation de complexité des conditions qui utilisent des fonctionnelles dépendantes de paramètres, ainsi que de matrices additionnelles dépendantes ou non de paramètre, par rapport aux conditions LMI correspondantes, formulées via l'approche par stabilité quadratique (fonctionnelles de Lyapunov et Lyapunov-Krasovskii à matrices fixes et indépendantes de paramètres). Cependant, l'effort de calcul nel additionnel, nécessaire pour les conditions proposées dans ce travail, est compensé, comme cela est démontré par des comparaisons numériques et des exemples présentés par les résultats obtenus. On observe encore que les conditions LMI peuvent être résolues par d'autres algorithmes spécialisés, tels que [Stu99], au-delà des algorithmes de points intérieurs utilisés dans ce travail [GNLC95].

6.1 D'Autres travaux réalisés

Quelques travaux réalisés pendant la période de doctorat ont abouti à des résultats qui ont des connexions avec les techniques et les problèmes abordés dans cette thèse. Ces travaux sont listés maintenant.

- [LMPJ02] V. J. S. Leite, M. F. Miranda, P. L. D. Peres, and F. G. Jota. Robust pole location for an interacting tank system with uncertain parameters. In *Proceedings of the 2002 International Conference on Industrial Electronics, Control and Instrumentation*, volume 2, pages 1618–1623, Seville, Spain, November 2002.
- [LP02] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres. Robust pole location for an active suspension quarter-car model through parameter dependent control. In *Proceedings of the 2002 International Conference on Control Applications*, volume 1, pages 447–452, Glasgow, UK, September 2002.
- [LP05] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres. Pole location control design of an active suspension system with uncertain parameters. *Vehicle and System Dynamics*, 2005. Aceito para publicação.
- [LP04] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres. Robust control through piecewise Lyapunov functions for discrete time-varying uncertain systems. *International Journal of Control*, 77(3) :230–238, February 2004.
- [LMP02] V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. Robust pole location by parameter dependent state feedback control. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1864–1869, Las Vegas, December 2002.
- [MLP03] V. F. Montagner, V. J. S. Leite, and P. L. D. Peres. Discrete-time switched systems : pole location and structural constrained control. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 6, pages 6242–6247, December 2003.
- [MLTP05] V. F. Montagner, V. J. S. Leite, S. Tarbouriech, and P. L. D. Peres. Stability and stabilizability of discrete-time switched linear systems with state delay. In *Proceedings of the 2005 American Control Conference*, June 2005. Accepted for publication.
- [MLP04] V. F. Montagner, V. J. S. Leite, and P. L. D. Peres. Design of a switched control with pole location constraints for a ups system. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics - ISIE 2004*, pages 441–446, Ajaccio, France, May 2004.
- [MLOP04] V. F. Montagner, V. J. S. Leite, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados linear variante com parâmetros : uma abordagem LMI. In *Anais do Congresso Brasileiro de Automática 2004*, Gramado, RS, Setembro 2004.
- [dOL⁺04a] P. J. de Oliveira, R. C. L. Oliveria, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. \mathcal{H}_2 guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions. *International Journal of Systems Science*, 35(5) :305–315, April 2004.
- [dOL⁺04b] P. J. de Oliveira, R. C. L. Oliveria, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. \mathcal{H}_∞ guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions. *Automatica*, 40(1) :1053–1061, January 2004.

- [LMP04] V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. Alocação robusta de pólos através de realimentação de estados dependente de parâmetros. *SBA Controle & Automação*, 15(2) :127–134, Abril / Junho 2004.
- [MOLP05] V. F. Montagner, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, and P. L. D. Peres. An LMI approach for \mathcal{H}_∞ linear parameter-varying state feedback control. *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*, 152(2), 2005.

6.2 Perspectives

La recherche réalisée dans ce travail indique que certains thèmes d'intérêt peuvent être explorés dans de nouvelles directions. Parmi de ces thèmes, on peut souligner ceux qui nous paraissent être les plus prometteurs :

- Développer des conditions de \mathcal{D} -stabilité de polytopes de matrices en utilisant

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} R_{11} \otimes P(\alpha) \\ + F(\alpha)(\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')F(\alpha)' \\ \star \end{array} & \begin{array}{c} R_{12} \otimes P(\alpha) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')G(\alpha) - F(\alpha) \\ R_{22} \otimes P(\alpha) - (G(\alpha) + G(\alpha)') \end{array} \end{array} \right] < \mathbf{0}$$

avec $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$, $\alpha_j \geq 0$ et en majorant l'équation ci-dessus par une fonction polynomiale où le degré de α_j est plus grand que 3. Les résultats présentés dans ce travail ont été obtenus pour le degré de α_j égal à 2 et 3. Pour cela, on doit formuler la condition ci-dessus, multipliée par $(\sum_{j=1}^N)^v$ $v \in \mathbb{N}$. On s'attend à que des conditions, chaque fois moins conservatives, soient obtenues à mesure que v augmente.

- Étudier des conditions pour la \mathcal{D} -stabilité de polytope de polynômes matriciels en utilisant des régions décrites par \mathcal{R} de dimensions plus grandes que 2. Cette étude peut encore contenir l'étude d'autres matrices de projection \mathcal{T} , de l'équation (3.11), dans la recherche de conditions moins conservatives.

- Étudier la synthèse de contrôleur pour la stabilisation robuste de polytopes de polynômes matriciels.

- Développer des conditions pour le calcul du coût garanti \mathcal{H}_∞ pour des systèmes neutres, ainsi que des conditions pour la synthèse de gains robustes pour le retour d'état qui puissent garantir *i)* la stabilité et *ii)* une performance (coût garanti \mathcal{H}_∞) du système en boucle fermée.

- Étudier des conditions dépendantes du retard, moins conservatives, en utilisant le Lemme de Finsler, pour des systèmes discrets dans le temps à retard dans les états. Dans ce cas, on doit réaliser une comparaison nécessaire avec des conditions basées sur l'augmentation du vecteur d'état.

- Aborder le problème du coût \mathcal{H}_2 pour des systèmes à retard dans les états.

- Étudier les systèmes avec retard dans les états et les traiter par des fonctionelles de Lyapunov-Krasovskii dépendantes de paramètres.

Bibliographie

- [Ack93] J. Ackermann. *Robust Control : Systems with Uncertain Parameters*. Springer Verlag, London, England, 1993.
- [ÅW84] K. J. Åström and B. Wittenmark. *Computer Controlled Systems : Theory and Design*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1984.
- [Bac98] O. Bachelier. *Commande des Systèmes Linéaires Incertains : Placement de Pôles Robuste en \mathcal{D} -Stabilité*. PhD thesis, INSA, Toulouse, Septembre 1998.
- [Bar85] B. R. Barmish. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 46(4) :399–408, August 1985.
- [Bar94] B. R. Barmish. *New Tools for Robustness of Linear Systems*. Macmillan Publishing Company, New York, NY, EUA, 1994.
- [BCK95] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat, and L. H. Keel. *Robust Control : The Parametric Approach*. Prentice-Hall Publishing Co., Upper Saddle River, NJ, USA, 1995.
- [BEFB94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1994.
- [BGR99] A. Bellen, N. Guglielmi, and A. E. Ruehli. Methods for linear systems of circuit delay differential equations of neutral type. *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part I : Fundamental Theory and Applications*, 46(1) :212–216, January 1999.
- [BHL88] A. C. Bartlett, C. V. Hollot, and H. Lin. Root locations of an entire polytope of polynomials : it suffices to check the edges. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 1 :61–71, 1988.
- [Bli02] P.-A. Bliman. Lyapunov equation for the stability of linear delay systems of retarded and neutral type. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(2) :327–335, February 2002.
- [Bli04a] P.-A. Bliman. A convex approach to robust stability for linear systems with uncertain scalar parameters. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 42(6) :2016–2042, 2004.
- [Bli04b] P. A. Bliman. An existence result for polynomial solutions of parameter-dependent LMIs. *Systems & Control Letters*, 51(3-4) :165–169, March 2004.
- [Bod45] H. W. Bode. *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. The Bell Telephone Laboratories Series. D. Van Nostrand Company, Inc., 1945.
- [BRT03] Y. Bin, Z. Ruijun, and L. Tao. Delay-dependent stability criterion for a class of neutral time-delay systems. In *Proceedings of the 2003 American Control Conference*, pages 2694–2696, Denver, CO, June 2003.

- [BS70] S. Barnett and C. Storey. *Matrix Methods in Stability Theory*. Applications of Mathematics Series. Thomas Nelson and Sons Ltd., 1970.
- [BT00] V. D. Blondel and J. N. Tsitsiklis. A survey of computational complexity results in systems and control. *Automatica*, 36(9) :1249–1274, September 2000.
- [CC03] S.-H. Chen and J.-H. Chou. Stability robustness of linear discrete singular time-delay systems with structured parameter uncertainties. *IEEE Proceedings — Control Theory and Applications*, 150(3) :295–302, May 2003.
- [CG96] M. Chilali and P. Gahinet. \mathcal{H}_∞ design with pole placement constraints : an LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3) :358–367, March 1996.
- [CGTV03] G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, and A. Vicino. Robust stability of polytopic systems via polynomially parameter-dependent Lyapunov functions. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4670–4675, Maui, HI, USA, December 2003.
- [CH04] D. Q. Cao and P. He. Stability criteria of linear neutral systems with a single delay. *Applied Mathematics and Computation*, 148(1) :135–143, January 2004.
- [Che03] J.-D. Chen. New stability criteria for a class of neutral systems with discrete and distributed time-delays : an LMI approach. *Applied Mathematics and Computation*, 150(3) :719–736, March 2003.
- [Che04] J.-D. Chen. Robust control for uncertain neutral systems with time-delays in state and control input via LMI and GAs. *Applied Mathematics and Computation*, 157(2) :535–548, September 2004.
- [CRZ00] J. Cullum, A. Ruehli, and T. Zhang. A method for reduced-order modeling and simulation of large interconnect circuits and its application PEED models with retardation. *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part II : Analog and Digital Signal Processing*, 47(4) :261–273, April 2000.
- [DB01] J. Daafouz and J. Bernussou. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parameter uncertainties. *Systems & Control Letters*, 43(5) :355–359, August 2001.
- [dOBG99] M. C. de Oliveira, J. Bernussou, and J. C. Geromel. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 37(4) :261–265, July 1999.
- [dOGB02] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and J. Bernussou. Extended \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ characterization and controller parametrizations for discrete-time systems. *International Journal of Control*, 75(9) :666–679, June 2002.
- [dOGH99] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and L. Hsu. LMI characterization of structural and robust stability : the discrete-time case. *Linear Algebra and Its Applications*, 296(1–3) :27–38, June 1999.
- [dOL⁺04a] P. J. de Oliveira, R. C. L. Oliveria, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. \mathcal{H}_2 guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions. *International Journal of Systems Science*, 35(5) :305–315, April 2004.

- [dOL⁺04b] P. J. de Oliveira, R. C. L. Oliveria, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. \mathcal{H}_∞ guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions. *Automatica*, 40(1) :1053–1061, January 2004.
- [dOLP04] P. J. de Oliveira, R. C. L. Oliveria, V. J. S. Leite, and P. L. D. Peres. Condições LMI para estabilidade robusta de politopos de matrizes polinomiais. *SBA Controle & Automação*, 15(4) :388–400, 2004.
- [dOOL⁺02a] P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. Estabilidade robusta de sistemas discretos no tempo através de desigualdades matriciais lineares. In *XIV Congresso Brasileiro de Automática*, pages 2884–2889, Natal, RN, Setembro 2002.
- [dOOL⁺02b] P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. LMI based robust stability conditions for linear uncertain systems : a numerical comparison. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 644–649, Las Vegas, December 2002.
- [dOP02] P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. A new LMI condition for robust stability of polynomial matrix polytopes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(10) :1775–1779, October 2002.
- [DV97] L. Dugard and E. I. Verriest, editors. *Stability and Control of Time-delay Systems*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1997.
- [El'66] L. E. El'sgol'ts. *Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Arguments*. Holden-Day, Inc., San Francisco, USA, 1966.
- [FAG96] E. Feron, P. Apkarian, and P. Gahinet. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(7) :1041–1046, July 1996.
- [Fri01] E. Fridman. New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems. *Systems & Control Letters*, 43(4) :309–319, July 2001.
- [FS03] E. Fridman and U. Shaked. An LMI approach to stability of discrete delay systems. In *Proceedings of the 2003 European Control Conference*, Cambridge, UK, September 2003.
- [Fu04] X. Fu. Controllability of abstract neutral functional differential systems with unbounded delay. *Applied Mathematics and Computation*, 151(2) :299–314, April 2004.
- [GAC96] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3) :436–442, March 1996.
- [GdOH98] J. C. Geromel, M. C. de Oliveira, and L. Hsu. LMI characterization of structural and robust stability. *Linear Algebra and Its Applications*, 285(1–3) :69–80, December 1998.
- [GJ81] S. Gutman and E. I. Jury. A general theory for matrix root-clustering in subregions of the complex plane. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(4) :853–863, August 1981.
- [GLR82] I. Gohberg, P. Lancaster, and L. Rodman. *Matrix Polynomials*. Academic Press, New York, NY, USA, 1982.

- [GN01] K. Gu and S.-I. Niculescu. Further remarks on additional dynamics in various model transformations of linear delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(3) :497–500, March 2001.
- [GNLC95] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali. *LMI Control Toolbox User's Guide*. The Math Works Inc., Natick, MA, 1995.
- [Hal77] J. Hale. *Theory of Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [Han02] Q.-L. Han. Robust stability of uncertain delay-differential systems of neutral type. *Automatica*, 38(4) :719–723, April 2002.
- [Han04] Q.-L. Han. A descriptor system approach to robust stability of uncertain neutral system with discrete and distributed delays. *Automatica*, 40(10) :1791–1796, October 2004.
- [HAPŠ01] D. Henrion, D. Arzelier, D. Peaucelle, and M. Šebek. An LMI condition for robust stability of polynomial matrix polytopes. *Automatica*, 37(3) :461–468, March 2001.
- [HB92] W. M. Haddad and D. S. Bernstein. Controller design with regional pole constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(1) :54–69, January 1992.
- [HBS01] D. Henrion, O. Bachelier, and M. Šebek. \mathcal{D} -stability of polynomial matrices. *International Journal of Control*, 74(8) :845–846, May 2001.
- [HD03] G. Hu and E. J. Davison. Real stability radii of linear time-invariant time-delay systems. *Systems & Control Letters*, 50(3) :209–219, October 2003.
- [HL03] D. W. C. Ho and G. P. Lu. Robust stabilization for a class of discrete-time non-linear systems via output feedback : the unified LMI approach. *International Journal of Control*, 76(2) :105–115, 2003.
- [HLP52] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2nd edition, 1952.
- [IND⁺03] D. Ivănescu, S.-I. Niculescu, L. Dugard, J.-M. Dion, and E. I. Verriest. On delay-dependent stability for linear neutral systems. *Automatica*, 39(2) :255–261, February 2003.
- [Kai80] T. Kailath. *Linear System*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1980.
- [KH98] V. Kapila and W. M. Haddad. Memoryless \mathcal{H}_∞ controllers for discrete-time systems with time delay. *Automatica*, 34(9) :1141–1144, 1998.
- [Kha78] V. L. Kharitonov. Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations. *Differentsial'nye Uravneniya*, 14 :2086–2088, 1978.
- [KNR99] V. B. Kolmanovskii, S. I. Niculescu, and J. P. Richard. On the Liapunov-Krasovskii functionals for stability analysis of linear delay systems. *International Journal of Control*, 72(4) :374–384, March 1999.
- [KP90] M. Kinnaert and Y. Peng. Discrete-time LQG/LTR technique for systems with time delays. *Systems & Control Letters*, 15(4) :303–311, November 1990.
- [KP99] J. H. Kim and H. B. Park. \mathcal{H}_∞ state feedback control for generalized continuous/discrete time-delay system. *Automatica*, 35(8) :1443–1451, August 1999.
- [KR99] V. B. Kolmanovskii and J. P. Richard. Stability of some linear systems with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(5) :984–989, May 1999.

- [KR03] C.-Y. Kao and A. Rantzer. Stability criteria for systems with bounded uncertain time-varying delay. In *Proceedings of European Control Conference*, University of Cambridge, UK, 2003.
- [Kuč79] V. Kučera. *Discrete Linear Control : The Polynomial Equation Approach*. Wiley, Chichester, England, 1979.
- [KV93] W. C. Karl and G. C. Verghese. A sufficient condition for the stability of interval matrix polynomials. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(7) :1139–1143, July 1993.
- [Las01] J. B. Lasserre. Global optimization with polynomials and the problem of moments. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 11(3) :796–817, 2001.
- [LHLK92] C.-H. Lee, T. Hseng, S. Li, and F.-C. Kung. D-stability analysis for discrete systems with a time delay. *Systems & Control Letters*, 19(3) :213–219, September 1992.
- [LKH04] Y.-S. Liu, C.-H. Fang S.-W. Kau, and L. Hong. An improved LMI-based \mathcal{D} -stability condition for polytopic uncertain systems. In *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer-Aided Control Systems Design*, pages 237–242, Taipei, Taiwan, September 2004.
- [LMd⁺04] V. J. S. Leite, V. F. Montagner, P. J. de Oliveira, R. C. L. Oliveria, D. C. W. Ramos, and P. L. D. Peres. Estabilidade robusta de sistemas lineares através de desigualdades matriciais lineares. *SBA Controle & Automação*, 15(1) :24–40, Janeiro / Março 2004.
- [LMP02] V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. Robust pole location by parameter dependent state feedback control. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1864–1869, Las Vegas, December 2002.
- [LMP04] V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. Alocação robusta de pólos através de realimentação de estados dependente de parâmetros. *SBA Controle & Automação*, 15(2) :127–134, Abril / Junho 2004.
- [LMPJ02] V. J. S. Leite, M. F. Miranda, P. L. D. Peres, and F. G. Jota. Robust pole location for an interacting tank system with uncertain parameters. In *Proceedings of the 2002 International Conference on Industrial Electronics, Control and Instrumentation*, volume 2, pages 1618–1623, Seville, Spain, November 2002.
- [LMRP02] V. J. S. Leite, V. F. Montagner, D. C. W. Ramos, and P. L. D. Peres. Estabilidade robusta de sistemas contínuos no tempo através de desigualdades matriciais lineares. In *Anais do XIV Congresso Brasileiro de Automática*, pages 2878–2883, Natal, RN, Setembro 2002.
- [LOdP04] V. J. S. Leite, R. C. L. F. Oliveira, P. J. de Oliveira, and P. L. D. Peres. \mathcal{D} -stability of polytopes of polynomial matrices : characterization through LMIs. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 863–868, Atlantis, Bahamas, December 2004.
- [LP02] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres. Robust pole location for an active suspension quarter-car model through parameter dependent control. In *Proceedings of the 2002 International Conference on Control Applications*, volume 1, pages 447–452, Glasgow, UK, September 2002.

- [LP03a] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres. An improved LMI condition for robust \mathcal{D} -stability of uncertain polytopic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(3) :500–504, March 2003.
- [LP03b] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres. An improved LMI condition for robust \mathcal{D} -stability of uncertain polytopic systems. In *Proceedings of the 2003 American Control Conference*, pages 833–838, Denver, CO, June 2003.
- [LP04] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres. Robust control through piecewise Lyapunov functions for discrete time-varying uncertain systems. *International Journal of Control*, 77(3) :230–238, February 2004.
- [LP05] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres. Pole location control design of an active suspension system with uncertain parameters. *Vehicle and System Dynamics*, 2005. Aceito para publicação.
- [LPT03] V. J. S. Leite, P. L. D. Peres, and S. Tarbouriech. Robust stability of time-delay continuous-time systems in polytopic domains. In *Proceedings of the 3rd IFAC International Workshop on Linear Time Delay Systems*, Rocquencourt, France, September 2003.
- [LTP] V. J. S. Leite, S. Tarbouriech, and P. L. Peres. Robust \mathcal{H}_∞ state feedback control of discrete-time systems with state delay : an LMI approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. Submitted for publication.
- [LTP04a] V. J. S. Leite, S. Tarbouriech, and P. L. Peres. Controle robusto \mathcal{H}_∞ de sistemas discretos com atraso nos estados : condições LMI independentes do atraso. In *Anais do XV Congresso Brasileiro de Automática*, Gramado, RS, Setembro 2004.
- [LTP04b] V. J. S. Leite, S. Tarbouriech, and P. L. Peres. A convex approach for robust state feedback control of discrete-time systems with state delay. In *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, pages 2870–2875, Boston, MS, June 2004.
- [Mah00] M. S. Mahmoud. *Robust Control and Filtering for Time-Dealy Systems*. Control Engineering Series. Marcekl Dekker, Inc., New York, 2000.
- [MK00] T. Mori and H. Kokame. A parameter-dependent Lyapunov function for a polytope of matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(8) :1516–1519, August 2000.
- [MLOP04] V. F. Montagner, V. J. S. Leite, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados linear variante com parâmetros : uma abordagem LMI. In *Anais do Congresso Brasileiro de Automática 2004*, Gramado, RS, Setembro 2004.
- [MLP03] V. F. Montagner, V. J. S. Leite, and P. L. D. Peres. Discrete-time switched systems : pole location and structural constrained control. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 6, pages 6242–6247, December 2003.
- [MLP04] V. F. Montagner, V. J. S. Leite, and P. L. D. Peres. Design of a switched control with pole location constraints for a ups system. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics - ISIE 2004*, pages 441–446, Ajaccio, France, May 2004.
- [MLTP05] V. F. Montagner, V. J. S. Leite, S. Tarbouriech, and P. L. D. Peres. Stability and stabilization of discrete-time switched linear systems with state delay. In *Proceedings of the 2005 American Control Conference*, June 2005. Accepted for publication.

- [MOLP05] V. F. Montagner, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, and P. L. D. Peres. An LMI approach for \mathcal{H}_∞ linear parameter-varying state feedback control. *IEEE Proceedings — Control Theory and Applications*, 152(2), 2005. Accepted for publication.
- [MX00] M. S. Mahmoud and L. Xie. Guaranteed cost control of uncertain discrete systems with delays. *International Journal of Control*, 73(2) :105–114, January 2000.
- [MZJ87] M. Malek-Zavarei and M. Jamshidi. *Time-Delay Systems : Analysis, Optimization and Applications*. North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1987.
- [Nic01] S.-I. Niculescu. *Delay Effects on Stability : A Robust Control Approach*, volume 269 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, London, 2001.
- [NT73] K. S. Narendra and S. S. Tripathi. Identification and optimization of aircraft dynamics. *Journal of Aircraft*, 10(4) :193–199, April 1973.
- [Nyq32] H. Nyquist. Regeneration theory. *Bell Systems Technical Journal*, 11 :126–147, January 1932.
- [PABB00] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, and J. Bernussou. A new robust \mathcal{D} -stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, 40(1) :21–30, May 2000.
- [Par00] P. A. Parrilo. *Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization*. Ph.D. Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, May 2000.
- [Par01] J.-H. Park. A new delay-dependent criterion for neutral systems with multiple delays. *Applied Mathematics and Computation*, 136(1-2) :177–184, November 2001.
- [Par03] J. H. Park. Simple criterion for asymptotic stability of interval neutral delay-differential systems. *Applied Mathematics Letters*, 16(7) :1063–1068, October 2003.
- [PKW04] J. H. Park, O. Kwon, and S. Won. LMI approach to robust \mathcal{H}_∞ filtering for neutral delay differential systems. *Applied Mathematics and Computation*, 150(1) :235–244, February 2004.
- [PTGL03] P. L. D. Peres, S. Tarbouriech, G. Garcia, and V. J. S. Leite. Robust stability of time-delay continuous-time systems in polytopic domains. In *Proceedings of the 2003 European Control Conference*, University of Cambridge, UK, September 2003.
- [PW00] J. H. Park and S. Won. Stability analysis for neutral delay-differential systems. *Journal of The Franklin Institute*, 337(1) :1–9, January 2000.
- [Ric03] J.-P. Richard. Time-delay systems : an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39(10) :1667–1694, October 2003.
- [RJ00] A. Rantzer and M. Johansson. Piecewise linear quadratic optimal control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(4) :629–637, April 2000.
- [RP01a] D. C. W. Ramos and P. L. D. Peres. A less conservative LMI condition for the robust stability of discrete-time uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 43(5) :371–378, August 2001.
- [RP01b] D. C. W. Ramos and P. L. D. Peres. An LMI approach to compute robust stability domains for uncertain linear systems. In *Proceedings of the 2001 American Control Conference*, volume 1, pages 4073–4078, Arlington, VA, June 2001.

- [RP02] D. C. W. Ramos and P. L. D. Peres. An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(4) :675–678, April 2002.
- [SBSA03] P. Shi, E.-K. Boukas, Y. Shi, and R. K. Agarwal. Optimal guaranteed cost control of uncertain discrete time-delay systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 157(2) :435–451, August 2003.
- [SK98] S. H. Song and J. K. Kim. \mathcal{H}_∞ control of discrete-time linear systems with norm-bounded uncertainties and time delay in state. *Automatica*, 34(1) :137–139, January 1998.
- [Sko90] V. I. Skorodinskii. Iterational method of construction of Lyapunov-Krasovskii functionals for linear systems with delay. *Automation and Remote Control*, 51(9) :1205–1212, 1990.
- [Stu99] J. F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11–12 :625–653, 1999. URL : <http://few-cal.kub.nl/sturm/software/sedumi.html>.
- [Tro99] A. Trofino. Parameter dependent Lyapunov functions for a class of uncertain linear systems : an LMI approach. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 2341–2346, Phoenix, AZ, December 1999.
- [Ver99] E. I. Verriest. Robust stability and adaptive control of time-varying neutral systems. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4690–4695, Phoenix, AZ, December 1999.
- [WH94] J. W. Wu and K. S. Hong. Delay-independent exponential stability-criteria for time-varying discrete delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(4) :811–814, 1994.
- [WHU99] Z. D. Wang, B. Huang, and H. Unbehauen. Robust \mathcal{H}_∞ observer design of linear state delayed systems with parametric uncertainty : the discrete-time case. *Automatica*, 35(6) :1161–1167, 1999.
- [Wil91] J. C. Willems. Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(3) :259–294, March 1991.
- [XC04] S. Xu and T. Chen. Robust \mathcal{H}_∞ control for uncertain discrete-time systems with time-varying delays via exponential output feedback controllers. *Systems & Control Letters*, 51(3-4) :171–183, March 2004.
- [XLY01] S. Xu, J. Lam, and C. Yang. Quadratic stability and stabilization of uncertain linear discrete-time systems with state delay. *Systems & Control Letters*, 43(2) :77–84, June 2001.
- [XLYV03] S. Xu, J. Lam, C. Yang, and E. I. Verriest. An LMI approach to guaranteed cost control for uncertain linear neutral delay systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13(1) :35–53, January 2003.
- [XSF97] L. Xie, S. Shishkin, and M. Fu. Piecewise Lyapunov functions for robust stability of linear time-varying systems. *Systems & Control Letters*, 31(3) :165–171, August 1997.
- [Xu02] S. Xu. Robust \mathcal{H}_∞ filtering for a class of discrete-time uncertain nonlinear systems with state delay. *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part I : Fundamental Theory and Applications*, 49(12) :1853–1859, December 2002.

- [YH04] D. Yue and Q.-L. Han. A delay-dependent stability criterion of neutral systems and its application to a partial element equivalent circuit model. *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part II : Analog and Digital Signal Processing*, 51(12) :685–689, December 2004.
- [ZDG96] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, 1996.
- [ZKT01] J. Zhang, C. R. Knopse, and P. Tsiotras. Stability of time-delay systems : equivalence between Lyapunov and scaled small-gain conditions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(3) :482–486, March 2001.
- [ZWH04] Z. Zuo, J. Wang, and L. Huang. Robust stabilization for non-linear discrete-time systems. *International Journal of Control*, 77(4) :384–388, 2004.